SPOSIZIONE ELEMENTARE

DELLA

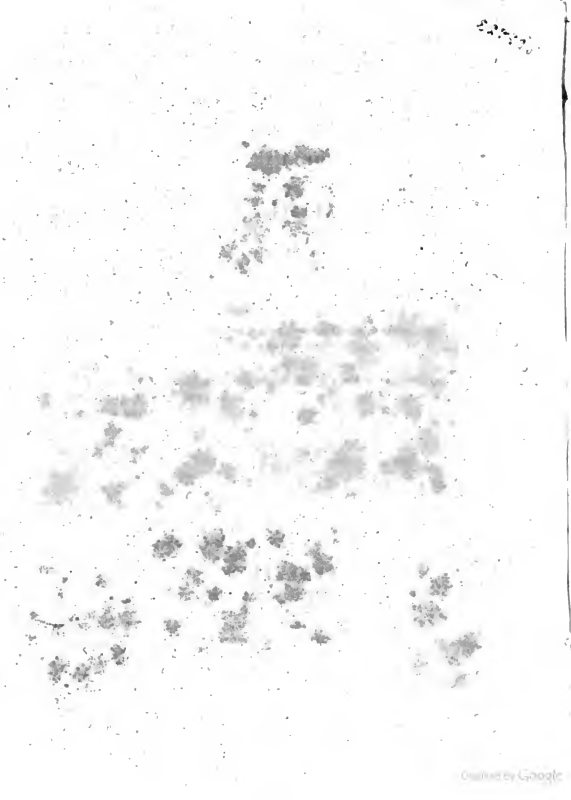
TEORICA DEI DETERMINANTI

COMPILATA

DAL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

MEMBRO EFFETTIVO PENSIONARIO DELL' I. R. ISTITUTO VENETO
DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

(Estr. dal Volume VII delle Memorie dell' Istituto stesso)

VENEZIA
PRESSO LA SEGRETERIA DELL' I. R. ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE
1857
NEL PRIV. STAB. NAZ. DI G. ANTONELLI

SPOSIZIONE ELEMENTARE

DELLA

TEORICA DEI DETERMINANTI

L'importanza della teoria dei *determinanti,* e l'uso, che suol farsene dagli odierni matematici, mi sembrano dare opportunità ad una sposizione elementare, che renda arcessibili ad ogni studioso le opere che trattano tale argomento, o che ne adoperano il calcolo od almeno le segnature. Crederei di far cosa utile se ad alcuno rendessi più facile l'intelligenza della *Teorica dei determinanti e sue principali applicazioni,* che il prof. Brioschi pubblicava or sono tre anni, e che dai matematici fu accolta con molto e meritato favore. Ebbi cura di separare i varii argomenti successivamente trattati, acciocchè, se in alcuno non riuscissi abbastanza chiaro, potesse il giovine proseguire allo studio degli altri.

I. *Funzioni risultanti. Funzioni alterne. Determinanti.*

§ 1. *Origine dei determinanti dalla eliminazione.* Perchè due equazioni

$$(1) \qquad a_1x+b_1=0 \quad , \quad a_2x+b_2=0$$

ad una sola incognita possano sussistere insieme, è palese che tra i loro coefficienti deve aver luogo l'equazione

$$(1) \qquad a_1b_2-a_2b_1=0,$$

che risulta eliminando l'incognita. In simil modo se tre sieno le equazioni a due incognite

$$
\text{(II)}\qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0 \end{aligned}
$$

l'eliminazione delle $x\, y$ dà la condizione necessaria per la loro simultanea esistenza, che è

$$
(2)\qquad \begin{aligned} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + \\ + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 = 0. \end{aligned}
$$

Dicasi simil cosa per ogni sistema di n equazioni di 1.° grado fra $(n-1)$ incognite. Le funzioni (1), (2), ec., che risultano dall'eliminazione furono dal Laplace (*Hist. Acad. des Sciences*, 1772, II) chiamate funzioni *risultanti;* presentemente si suol dare ad esse il nome di *determinanti* introdotto (come diremo nella IV parte di questa sposizione) dal Gauss. — Faremo vedere in appresso che alle funzioni risultanti dall'eliminazione appartengono le proprietà che ora stabiliremo per definizione.

§ 2. *Definizione del determinante.* Il determinante del grado $n.^{esimo}$ dipende da un numero n^2 di quantità (alcune delle quali possono esser nulle) che si dicono i suoi *elementi;* il determinante comprende $n\,(n-1)\;(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1$ *termini,* ognuno dei quali è il prodotto di n elementi. — Per meglio intendere la formazione dei termini del determinante distribuiamo gli elementi in n righe ed in n colonne, come qui si vede pel caso di $n=4$

$$
\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4\,; \end{matrix}
$$

ogni termine conterrà un solo elemento per ciascuna riga ed un solo per ciascuna colonna; così sono termini del determinante di 4.^{to} grado

$$
a_1 b_2 c_3 d_4\,,\quad a_1 b_3 c_2 d_4\,,\quad a_4 b_2 c_3 d_1\,,\ \text{ecc.},
$$

una metà dei termini ha il segno + e l'altra il segno —. Suol darsi il segno + al termine $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$ prodotto degli elementi posti nella diagonale da sinistra

verso destra discendendo; dopo ciò ogni alternazione tra gl' indici (numeri posti abbasso) apposti alle lettere, ossia ogni alternazione tra le righe di due elementi posti in due colonne date, porta di conseguenza il cangiamento del segno del termine. Così dandosi al termine $a_1 b_2 c_3 d_4$ il segno $+$, l' altro $a_1 b_3 c_2 d_4$ prenderà il segno —, perchè si sono tra loro alternati gl' indici 2 3 apposti alle lettere b c; ossia perchè agli elementi delle colonne 2.ª e 3.ª si sono alternate le righe, cioè il primo che era nella riga 2.ª passò nella 3.ª e viceversa. L' altro termine $a_1 b_3 c_4 d_2$ prenderà il segno $+$, perchè dal precedente (che ha il segno —) a questo si sono alternati gl' indici delle lettere c d. Così pure si scriverà $- a_1 b_2 c_4 d_3$, perchè dal $+ a_1 b_3 c_4 d_2$ a questo si sono alternati gl' indici delle b d. Confrontando questo $- a_1 b_2 c_4 d_3$ col $+ a_1 b_2 c_3 d_4$ si scorge pure che si sono alternati gli indici delle c d. — Veggasi la nota sui cangiamenti nelle disposizioni.

§ 3. *Segnature e definizioni.* Gli elementi disposti in quadrato e chiusi tra due linee verticali disegnano il determinante, così

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a, b \\ c, d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a, b, c \\ d, e, f \\ g, h, k \end{vmatrix} = aek - ahf - dbk + dhc + gbf - gec;$$

spesso si ommettono le virgole tra gli elementi, Quando gli elementi sieno indicati in modo che chiaramente apparisca la loro formazione, noi porremo tra le due | | i soli elementi della *diagonale* (intendendo sempre per *diagonale* quella da sinistra verso destra discendendo). Così $| a_1 b_2 c_3 \ldots |$ equivalerà a

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \ldots \\ a_2 b_2 c_2 \ldots \\ a_3 b_3 c_3 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

$$| a_q^{(p)} a_r^{(r)} | \quad \text{equivalerà a} \quad \begin{vmatrix} a_q^{(p)} & a_q^{(r)} \\ a_r^{(p)} & a_r^{(r)} \end{vmatrix}, \text{ ec.}$$

Siccome tutto quello che vale per una riga degli elementi può applicarsi anche ad una colonna, così, a brevità di linguaggio, quando diremo *riga* potrà intendersi tanto una fila orizzontale di elementi, quanto una fila verticale; e la parola *colonna* indicherà una fila perpendicolare a quella che s'intese per riga. Notiamo pure che parlando della *prima*, della *seconda* riga, ec., dovrà applicarsi il discorso a due righe quali si vogliano, giacchè esse tutte entrano egualmente nella formazione del determinante.

§ 4. *Modo da seguirsi per iscrivere tutti i termini di un determinante.* Per non ommettere nè ripetere alcun termine, e per dare a tutti il loro vero segno, gioverà attenersi alla seguente regola. I fattori di ogni termine si prendano *ordinatamente* da ciascuna colonna verticale; si avverta che gli elementi debbono prendersi uno per ciascuna riga orizzontale; si cominci dalle righe più alte e si vada gradatamente discendendo; quando si scrive ciascun elemento si esamini se la sua riga orizzontale sia superiore ad uno o più degli elementi già scritti (senza badare di quante righe sia superiore), ed in tal caso gli si pongano al di sopra altrettanti punti; scritti gli n elementi, al loro prodotto si attribuisca il segno + o — secondo che il numero totale di quei punti è pari o dispari. — Così nel determinante (2) del §. 3 il primo termine aek si ottenne prendendo il primo elemento della prima colonna, il secondo della seconda (giacchè il primo non si poteva prendere non dovendo esservi due elementi della stessa riga) ed il terzo della terza; anche negli altri termini il primo elemento è tolto dalla prima colonna, il secondo dalla seconda, ec.; nel termine successivo invece del penultimo elemento e si prese quello h che lo segue immediatamente nella stessa colonna, poscia il terzo elemento fu necessariamente f, il quale essendo in una riga superiore ad h riceve un punto al di sopra, perlochè al termine $-ah\dot{f}$ si dà il segno —. Si passa a prendere nell' antipenultima colonna l' elemento d che sussegue ad a già adoperato, e nella penultima colonna si prende il primo elemento b, a cui si sovrappone un punto, e si ha il termine $-d\dot{b}k$. Ritenuto per primo elemento il d, non può prendersi nella seconda colonna che l' h e nella terza il c, che è in una riga superiore a due fra gli elementi precedenti, sicchè si ha il termine $+dh\ddot{c}$ col segno +, perchè due sono i punti. Coi due termini $+g\dot{b}\dot{f}-ge\dddot{c}$ è compiuto lo sviluppo del determinante; il che si verifica osservando che i termini sono (§. 2) $3.2.1=6$, una metà col segno +. In simil modo si ha

$$
\begin{aligned}
|\,a_1 b_2 c_3 d_4\,| = {} & a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 \dot{d}_3 - a_1 b_3 \dot{c}_2 d_4 + \\
& + a_1 b_3 c_4 \ddot{d}_2 + a_1 b_4 \dot{c}_2 \dot{d}_3 - a_1 b_4 \dot{c}_3 \ddot{d}_2 - a_2 \dot{b}_1 c_3 d_4 + \\
& + a_2 \dot{b}_1 c_4 \dot{d}_3 + a_2 b_3 \ddot{c}_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 \dddot{d}_1 - a_2 b_4 \ddot{c}_1 \dot{d}_3 + \\
& + a_2 b_4 \dot{c}_3 \dddot{d}_1 + a_3 \dot{b}_1 \dot{c}_2 d_4 - a_3 \dot{b}_1 c_4 \ddot{d}_2 - a_3 \dot{b}_2 \ddot{c}_1 d_4 + \\
& + a_3 \dot{b}_2 c_4 \dddot{d}_1 + a_3 b_4 \ddot{c}_1 \ddot{d}_2 - a_3 b_4 \ddot{c}_2 \dddot{d}_1 - a_4 \dot{b}_1 \dot{c}_2 \dot{d}_3 + \\
& + a_4 \dot{b}_1 \dot{c}_3 \ddot{d}_2 + a_4 \dot{b}_2 \ddot{c}_1 \dot{d}_3 - a_4 \dot{b}_2 \dot{c}_3 \dddot{d}_1 - a_4 \dot{b}_3 \ddot{c}_1 \ddot{d}_2 + a_4 \dot{b}_3 \ddot{c}_2 \dddot{d}_1 .
\end{aligned}
$$

Le colonne essendo indicate dalle lettere, alle quali si conservò sempre lo stesso ordine, i rovesciamenti d'ordine degli indici (i quali distinguono le varie righe) possono scorgersi ad occhio anche senza bisogno dei punti; così nel 6.° termine si vede che l'indice 3 è preceduto da *uno* che lo supera, e l'indice 2 è preceduto da *due* che lo superano, perciò il termine riceve il segno —. (Gli indici di ciascun termine riuniti insieme a formare un solo numero danno una serie di numeri crescenti 1234, 1243, 1324, 1342, ecc.). Può notarsi che eccettuati i termini primo ed ultimo gli altri sono a due a due col segno +, e col segno —. Veggasi la Nota.

§ 5. Daremo in seguito altri modi per calcolare numericamente il valore di un determinante; del resto potrà sempre servire lo sviluppo ora insegnato, ed anzi esso è forse il più comodo quando il determinante contenga parecchi elementi nulli, il che riduce molto minore il numero dei termini. Eccone un esempio

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}
= 1.5(-5)(-1)1 + 1.1.4.1 - 2.1.6.1 - 4.5.6(-1) = 25 + 4 - 12 + 120 = 137.
$$

§ 6. Teorema. *Eseguendo alcune alternazioni tra le righe, il valore del determinante cangia di segno se il numero delle alternazioni sia dispari.* Ciò risulta evidentemente dalle cose predette. Così sarà

$$
|\,a_1 b_2 c_3 d_4\,| = -\,|\,a_3 b_2 c_1 d_4\,| = |\,a_4 b_3 c_2 d_1\,| = |\,a_3 b_1 c_2 d_4\,| = \text{ecc.},
$$

perchè il secondo determinante si deduce dal primo alternando tra loro le due righe 1 e 3; il terzo si deduce dal primo alternando le righe 1, 4, nonchè le 2, 3, ecc.

Per conoscere il segno di un determinante rispetto ad un altro composto

delle stesse righe di elementi, basta esaminare quali sieno i segni di uno stesso termine in ambedue i determinanti. — Le colonne si possono anche mutare nelle righe e viceversa, così per esempio

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & f & k \\ a & d & g \\ b & e & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & c & k \\ d & a & g \\ e & b & h \end{vmatrix} = \text{ec.}$$

L' ultimo determinante deriva dal primo mutando le righe in colonne, poscia cangiando la disposizione delle righe e delle colonne; ad esso si diede il segno —, perchè il suo termine diagonale fah ha il segno — nel primo determinante, in cui è $-ahf$.

§ 7. *Origine dei determinanti col mezzo delle funzioni alterne.* Rispetto ad n quantità $a, b, c, \ldots h$ si dicono funzioni *simmetriche* quelle che rimangono invariate qualunque alternazione o permutazione si eseguisca tra quelle quantità; tali sono, p. e.,

$$(1) \qquad \begin{aligned} s_1 &= a + b + c \ldots + h \\ s_2 &= a^2 + b^2 + c^2 \ldots + h^2 \\ s_3 &= a^3 + b^3 + c^3 \ldots + h^3 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} p_1 &= a + b + c \ldots + h \\ p_2 &= ab + ac \ldots + ah + bc \ldots + bh + \ldots \text{ec.} \\ p_3 &= abc + abd \ldots + abh + bcd \ldots bch + \text{ec.} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= abcd \ldots h. \end{aligned}$$

Invece si dicono funzioni *alterne* quelle che ad ogni alternazione tra due quantità conservano lo stesso valore ma cangiano di segno; tale è la

$$(3) \qquad \Pi = (b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)(e-d) \ldots \ldots (e-a) \ldots \ldots (h-a).$$

Infatti se, per esempio, si alternano tra loro le due quantità a, d i fattori $(b-a)(d-b)$, $(c-a)(d-c)$, $(e-a)(e-d)$, ecc. si cangiano nei loro eguali $(b-d)(a-b)$, $(c-d)(a-c)$, $(e-d)(e-a)$, ec., mentre il fattore $(d-a)$ diventa $(a-d)$, cioè cangia di segno. Questa funzione alterna Π può con-

durre ai determinanti; ci serva di esempio il caso di tre sole quantità, che si sviluppa in

$$\Pi = (b-a)(c-b)(c-a) = bc^2 - b^2c - ac^2 + b^2a + aea - aba,$$

e può anche scriversi

$$\Pi = a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 - a^1 b^0 c^2 + a^1 b^2 c^0 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c^0$$

e contiene $9 = 3^2$. simboli $a^0\ b^0\ c^0\ a^1 \ldots c^2$.

Ora se supponiamo che questi simboli, anzichè indicare le potenze di tre sole quantità, rappresentino nove quantità affatto arbitrarie e disposte in tre righe e in tre colonne, la funzione alterna Π diventa ciò che dicesi il determinante di 3.° grado

$$P = a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 - \text{ec.} = | a_0 b_1 c_2 |.$$

Ciò si accorda colla definizione data al § 2; infatti prendendo il primo termine di ciascuno dei binomii della (3) si ottiene il prodotto

$$bc^2d^3 \ldots h^{n-1} = a^0 b^1 c^2 d^3 \ldots h^{n-1},$$

e tutti gli altri termini dello sviluppo di Π si ottengono alternando in questo primo una o più volte due lettere tra di loro, e ad ogni alternazione mutando il segno. — La funzione alterna potrà segnarsi con

$$\Pi = | a^0 b^1 c^2 \ldots h^{n-1} | \qquad (4)$$

conservando agli esponenti il loro ordinario significato.

§ 8. *Moltiplicazione di un determinante per una o più quantità.* Teorema. *Se si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per una stessa quantità si viene a moltiplicare anche il determinante;* giacchè ne risultano moltiplicati tutti i termini. Perciò se $a_1' = ra_1$, $b_1' = rb_1$, $c_1' = rc_1$ sarà $| a_1' b_2 c_3 | = r | a_1 b_2 c_3 |$. — Corollario. *Moltiplicando gli elementi di ciascuna riga per una stessa quantità, e gli elementi di ciascuna colonna per altra quantità, il determinante viene a moltiplicarsi pel prodotto di tutte quelle quantità.* Ciò è espresso dalla formula

$$\begin{vmatrix} r_1\alpha a_1, & r_1\beta b_1, & r_1\gamma c_1 \\ r_2\alpha a_2, & r_2\beta b_2, & r_2\gamma c_2 \\ r_3\alpha a_3, & r_3\beta b_3, & r_3\gamma c_3 \end{vmatrix} = r_1 r_2 r_3 \alpha\beta\gamma \, | a_1 b_2 c_3 |.$$

§. 9. Proponiamoci per esempio di dimostrare l'eguaglianza dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix};$$

cerchiamo se col mezzo delle moltiplicazioni indicate nel precedente corollario il primo determinante moltiplicato per $r_1 r_2 r_3 \alpha\beta\gamma$ possa ridursi identico col secondo; a tal fine bisognerà che abbiano luogo le equazioni

$$\begin{array}{llll} & r_1\beta = a & r_1\gamma = b & r_1\delta = c \\ r_2\alpha = a & & r_2\gamma c^2 = c & r_2\delta b^2 = b \\ r_3\alpha = b & r_3\beta c^2 = c & & r_3\delta a^2 = a \\ r_4\alpha = c & r_4\beta b^2 = b & r_4\gamma a^2 = a & \end{array}$$

alle quali fortunatamente si può soddisfare ponendo

$$r_1 = \frac{a}{\beta}\,;\quad \gamma = \frac{b}{a}\beta,\quad \delta = \frac{c}{a}\beta,$$

$$\alpha = bc\beta,\quad r_2 = \frac{a}{bc\beta},\quad r_3 = \frac{1}{c\beta},\quad r_4 = \frac{1}{b\beta};$$

cioè i moltiplicatori delle righe sono

$$r_1 = \frac{a}{\beta},\quad r_2 = \frac{a}{bc\beta},\quad r_3 = \frac{1}{c\beta},\quad r_4 = \frac{1}{b\beta},$$

e quelli delle colonne sono

$$\alpha = bc\beta,\quad \beta,\quad \gamma = \frac{b}{a}\beta,\quad \delta = \frac{c}{a}\beta,$$

e siccome il loro prodotto è uguale all'unità, così i due determinanti proposti sono eguali. — Il che può verificarsi collo sviluppo (§ 4) e si trova che questo determinante preso negativamente è uguale al quadrato del quadruplo dell'area del triangolo coi lati a, b, c.

§ 10. *Riduzione di un determinante ad altri di grado inferiore.* Segueremo con $D_{a_1} | a_1 b_2 c_3 \ldots |$ il coefficiente di a_1 nello sviluppo del determi-

nante $|a_1 b_2 c_3 \ldots|$. Siccome il determinante è di 1.° grado rispetto all' elemento a_1, così è palese che la caratteristica D_{a_1} indica la *derivata* rispetto ad a_1, e che $D_{a_1}|a_1 b_2 \ldots|$ non contiene ulteriormente a_1; come non può contenere alcun altro elemento $b_1\ c_1 \ldots a_2\ a_3 \ldots$ della stessa riga e della stessa colonna di a_1. È pur palese, che tutti i termini del determinante $|a_1 b_2 c_3 \ldots|$ dovendo contenere uno degli elementi $a_1\ b_1\ c_1 \ldots$ della prima riga, si avrà identicamente

$$(1)\quad |a_1 b_2 c_3 \ldots| = \left(a_1 D_{a_1} + b_1 D_{b_1} + c_1 D_{c_1} \ldots\right) |a_1 b_2 c_3 \ldots|$$

dove il determinante $|a_1 b_2 c_3 \ldots|$ deve intendersi unito a ciascuna delle caratteristiche D contenute dentro delle parentesi. Abbiamo già avvertito al § 3 che quanto si dice di una riga vale per ogni altra ed anche per ogni colonna, sicchè si ha eziandio

$$|a_1 b_2 c_3 \ldots| = \left(a_2 D_{a_2} + b_2 D_{b_2} + \ldots\right) |a_1 b_2 \ldots|\,,\ \text{ec.}$$

ed anche

$$(2)\quad |a_1 b_2 c_3 \ldots| = \left(a_1 D_{a_1} + a_2 D_{a_2} + a_3 D_{a_3} \ldots\right) |a_1 b_2 \ldots|\,,\ \text{ec.}$$

§ 11. Quando si ponga mente al modo con cui si sviluppa un determinante (§ 4), si vedrà che $D_{a_1}|a_1 b_2 c_3 \ldots|$ è precisamente il determinante di un grado inferiore $|b_2 c_3 \ldots|$. In quanto a $D_{b_1}|a_1 b_2 c_3 \ldots|$ esso differisce da $|a_2 c_3 \ldots|$ soltanto nel segno, sicchè l'equazione (1) del § precedente diviene

$$(1)\quad |a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots| = a_1 |b_2 c_3 d_4 \ldots| - b_1 |a_2 c_3 d_4 \ldots| + c_1 |a_2 b_3 d_4 \ldots| - d_1 |a_2 b_3 c_4 \ldots| + \text{ec.}$$

così pure

$$|a_1 b_2 c_3 \ldots| = -a_2 |b_1 c_3 \ldots| + b_2 |a_1 c_3 \ldots| - c_2 |a_1 b_3 \ldots| + \text{ec.}$$

$$(2)\quad |a_1 b_2 c_3 \ldots| = a_1 |b_2 c_3 \ldots| - a_2 |b_1 c_3 \ldots| + a_3 |b_1 c_2 d_4 \ldots| - \text{ec.},$$

ecc. Le ragioni dei segni si scorgeranno facilmente osservando che nel determinante $|a_1 b_2 c_3 \ldots|$ sono compresi i termini $a_1 b_2 c_3 \ldots$, $-a_2 b_1 c_3 \ldots$, $+a_2 b_3 c_1 \ldots$, ec., $-a_3 b_2 c_1 \ldots$, $+a_3 b_1 c_2 \ldots$, ecc., e con po' d' attenzione si scorgerà che Teorema: *Ogni determinante è uguale alla somma degli*

elementi di una sua riga moltiplicati rispettivamente pei determinanti, che si ottengono cancellando dal determinante proposto tutta la colonna e tutta la riga, alle quali appartiene l'elemento considerato, purchè al prodotto si dia il segno + o — secondo che quell' elemento è distante di un numero pari o dispari di posti dalla diagonale.

§ 12. *Spartizione di un determinante.* Se gli elementi di una riga si separano in un egual numero di parti, lo stesso può farsi del determinante, ritenendo tutte le altre righe di elementi. Infatti la (1) del § 11 mostra che se

$$a_1 = a_1' + a_1'', \quad b_1 = b_1' + b_1'', \quad c_1 = c_1' + c_1'' \quad \text{si ha}$$

$$|a_1 b_2 c_3| = |a_1' b_2 c_3| + |a_1'' b_2 c_3|$$

ritenendo che gli apici rimangano applicati alle lettere della prima riga, cioè a quelle che hanno l'indice 1. Così, per esempio, spartendo gli elementi della prima riga orizzontale in tre parti si ha

$$\begin{vmatrix} 7, 5, 6 \\ 2, 3, 4 \\ 1, 2, 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, 3, 4 \\ 2, 3, 4 \\ 1, 2, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, 2, 0 \\ 2, 3, 4 \\ 1, 2, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4, 0, 2 \\ 2, 3, 4 \\ 1, 2, 0 \end{vmatrix}.$$

Vedremo tra poco che i due primi determinanti del secondo membro si annullano. — Dalla spartizione risulta viceversa che: Teorema. *Due o più determinanti che abbiano identici gli elementi di tutte le righe eccettuata una sola possono sommarsi in un solo determinante.* — In via d'esercizio presento la

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

avendo scorto che i tre determinanti contenevano due righe comuni, ho mutato nel primo le colonne verticali in righe orizzontali, nel secondo ho alternate le due righe orizzontali, poscia ho mutato l'ordine delle colonne, finalmente nel

3.° determinante ho preso le righe nell'ordine: seconda, terza e prima (in tutti questi cangiamenti ho posta attenzione al segno del determinante ed ho veduto che esso non cangiava; poichè nel primo determinante il termine diagonale 1.2.6 si mantiene diagonale; nel secondo determinante il termine diagonale 4.2.4 diventa 4.2.4, cioè (§.4) ancora positivo; così pure nel terzo determinante il termine diagonale 4.1.4 diventa 4.1.4;) dopo ciò avendo ridotti i tre determinanti colle due ultime righe identiche, ho sommati gli elementi delle prime righe ed ottenni l'ultimo determinante, che ben presto vedremo esser nullo.

§ 13. La spartizione che abbiamo fatta in una riga può ripetersi sulle altre e si otterranno tanti determinanti quante sono le combinazioni delle parti delle righe. Così, per esempio,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2+\gamma_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3+\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2+\beta_2 & c_2+\gamma_2 \\ a_3 & b_3+\beta_3 & c_3+\gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ \alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2+\gamma_2 \\ \alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3+\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+\gamma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+\gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2+\gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3+\gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \text{ec.} = \text{ec.}$$

Compiendo questo sviluppo si ottiene la formula

$$| a_1+\alpha_1 , b_2+\beta_2 , c_3+\gamma_3 | = | a_1 b_2 c_3 | + | a_1 b_2 \gamma_3 | + | a_1 \beta_2 c_3 | +$$

$$+ | a_1 \beta_2 \gamma_3 | + | \alpha_1 b_2 c_3 | + | \alpha_1 b_2 \gamma_3 | + | \alpha_1 \beta_2 c_3 | + | \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 | ,$$

che è facile da tenersi a memoria per la sua perfetta analogia collo sviluppo del prodotto di tre binomii; essa esprime un teorema dato dal Chiò in una Memoria pubblicata a Torino nel 1853.

§ 14. *Determinanti che identicamente si annullano.* Un determinante che abbia due righe uguali in tutti i loro elementi è nullo; poichè se sia $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, ec. ogni termine contenente il prodotto $a_1 b_2$ sarà distrutto dall'altro che contiene $-a_2 b_1$, ecc. Combinando questo teorema con quello sulla moltiplicazione di un determinante (§ 8), e con quello sulla spartizione (§ 12) si riconosce che: Teorema. *È nullo ogni determinante, in cui gli elementi di*

una riga risultano ad uno ad uno dalla somma degli elementi corrispondenti delle altre righe moltiplicati per numeri costanti per ciascheduna riga.

Così, per esempio, è $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 14 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

perchè gli elementi della seconda riga risultano dagli altri mediante le equazioni

$$14 = 3.4 + 2.1\ ,\quad 10 = 3.2 + 2.2\ ,\quad 0 = 3(-2) + 2.3.$$

Infatti quel determinante si spartisce (§ 12 e § 8) nei due .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

ognuno dei quali è nullo. — Veggansi gli altri esempii al § 12.

§ 15. Viceversa: Teorema. *Quando un determinante è nullo, gli elementi di una riga sono ordinatamente uguali alla somma di quelli delle altre righe moltiplicati per coefficienti costanti per ciascuna riga.* Infatti se sia $| a_1 b_2 c_3 | = 0$ sussistono insieme le tre equazioni (II) del § 1, e perciò gli elementi $c_1 c_2 c_3$ risultano da quelli delle altre due colonne $a_1 a_2 a_3$ $b_1 b_2 b_3$ moltiplicati pei coefficienti $x\, y\, z$ costanti per ciascuna colonna. Abbiamo già notato (§ 3) che quanto si dice per le righe vale anche per le colonne.

§ 16. Corollario. *Un determinante non cangia di valore se agli elementi di una riga si sommano ordinatamente quelli di un'altra riga moltiplicati per un coefficiente costante.* Ciò risulta dai §§ 12 e 15. È un' immediata conseguenza di questo corollario un teorema di Sylvester *(Philos. Magaz.* 1852) riportato dal Brioschi *(Teorica*, pag. 28).

§ 17. Giova notare una conseguenza di questo corollario. Se nel determinante $| a_1 b_2 \dots |$ gli elementi di ciascuna riga, eccettuata soltanto la prima, sieno legati da una medesima equazione omogenea

$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + \text{ec.} = 0$$
$$Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + \text{ec.} = 0\ ,\ \text{ecc.}$$

potremo sostituire (§ 16) a ciascuna a l' espressione $a + \frac{B}{A} b + \frac{C}{A} c + \dots$

nel qual caso gli elementi 2.°, 3.° . . . della prima colonna si annulleranno tutti, ed il determinante si ridurrà perciò (§ 10) ai soli termini moltiplicati pel 1.° elemento, cioè a

$$\left(a_1 + \frac{B}{A} b_1 + \frac{C}{A} c_1 + \ldots\right) \mid b_2 c_3 \ldots \mid \ldots$$

§ 18. *Somme nulle dei prodotti degli elementi per le derivate di un determinante.* Se le quantità, che nello sviluppo di un determinante moltiplicano (§§ 10, 11) gli elementi di una sua riga si moltiplichino invece per gli elementi di un' altra riga la somma è nulla; cioè se nelle (1) dei §§ 10, 11 mutiamo $a_1 b_1 c_1$ in $a_2 b_2 c_2$ oppure in $a_3 b_3 c_3$ si ottengono le

$$(1) \quad \begin{aligned} &(a_2 D_{a_1} + b_2 D_{b_1} + c_2 D_{c_1}) \mid a_1 b_2 c_3 \mid = 0 \\ &(a_3 D_{a_1} + b_3 D_{b_1} + c_3 D_{c_1}) \mid a_1 b_2 c_3 \mid = 0 \end{aligned}$$

ossia

$$(2) \quad \begin{aligned} &a_2 \mid b_2 c_3 \mid - b_2 \mid a_2 c_3 \mid + c_2 \mid a_2 b_3 \mid = 0 \\ &a_3 \mid b_2 c_3 \mid - b_3 \mid a_2 c_3 \mid + c_3 \mid a_2 b_3 \mid = 0 . \end{aligned}$$

Infatti se nella (1) del § 10 mutiamo le $a_1 b_1 c_1$ nelle $a_2 b_2 c_2$, ciò non cangia le derivate $D_{a_1} \mid a_1 b_2 c_3 \mid$, ec., che sono indipendenti dalle $a_1 b_1 c_1$, perciò il primo membro diventa $\mid a_2 b_2 c_3 \mid$, che è nullo (§ 14) avendo gli elementi delle due prime righe rispettivamente uguali.

§ 19. *Applicazione alla risoluzione delle equazioni.* Le equazioni (II) del § 1 sussistono insieme soltanto quando sia $\mid a_1 b_2 c_3 \mid = 0$; infatti in questo caso la (1) del § 10 e la (1) del § 18 danno

$$\begin{aligned} &(a_1 D_{a_1} + b_1 D_{b_1} + c_1 D_{c_1}) \mid a_1 b_2 c_3 \mid = 0 \\ &(a_2 D_{a_1} + b_2 D_{b_1} + c_2 D_{c_1}) \mid a_1 b_2 c_3 \mid = 0 \\ &(a_3 D_{a_1} + b_3 D_{b_1} + c_3 D_{c_1}) \mid a_1 b_2 c_3 \mid = 0 \end{aligned}$$

paragonandole colle (II) del § 1 si vede che queste rimangono soddisfatte da

$$x = \frac{D_{a_1} | a_1 b_2 c_3 |}{D_{c_1} | a_1 b_2 c_3 |}, \quad y = \frac{D_{b_1} | a_1 b_2 c_3 |}{D_{c_1} | a_1 b_2 c_3 |}$$

ed è pur palese che questi valori delle $x\,y$ non soddisfarebbero alla prima delle (II) se non fosse $| a_1 b_2 c_3 | = 0$. Ponendo in luogo delle derivate i determinanti di un grado inferiore (§ 11) i valori precedenti divengono

$$x = \frac{| b_2 c_3 |}{| a_2 b_3 |}, \quad y = \frac{-| a_2 c_3 |}{| a_2 b_3 |}$$

dove i secondi membri si veggono dipendere dai coefficienti di due sole delle (II).

§ 20. Per mantenere la simmetria delle formule, le equazioni sogliónsi rendere omogenee mediante l'introduzione di un'altra incognita; prendiamo per esempio a considerare le tre equazioni a quattro incognite

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t &= 0 \end{aligned}$$

immaginiamo il determinante $| a_1 b_2 c_3 d |$ (che comprende le quantità $a\,b\,c\,d$, le quali spariscono nel prendere le derivate, rimanendo così i soli coefficienti delle (III)) e vedremo che le incognite $x\,y\,z\,t$ saranno proporzionali alle derivate $D_a\ D_b\ D_c\ D_d$ di quel determinante; infatti sostituendo tali valori le (III) divengono identiche, perchè i loro primi membri sono i determinanti $| a_1 b_2 c_3 d_1 |$, $| a_1 b_2 c_3 d_2 |$, $| a_1 b_2 c_3 d_3 |$ tutti nulli; giacchè l'ultima riga è uguale ad una delle precedenti. Ne viene che le incognite $x\,y\,z\,t$ sono anche proporzionali (§ 11) ai determinanti

$$-| b_1 c_2 d_3 |, \quad | a_1 c_2 d_3 |, \quad -| a_1 b_2 d_3 |, \quad | a_1 b_2 c_3 |.$$

§ 21. *Equazioni che hanno gli ultimi termini, eccetto uno solo, tutti nulli.* Ci gioverà in seguito aver fatto le seguenti considerazioni. Date $(n-1)$ equazioni fra altrettante incognite

$$a_1 x + b_1 y \ldots + h_1 = 0 \;\ldots\ldots\; a_{n-1} x + b_{n-1} y \ldots + h_{n-1} = 0$$

si ha pel § precedente

$$x = \frac{(-1)^{n-1} | b_1 c_2 \ldots h_{n-1} |}{| a_1 b_2 \ldots g_{n-1} |}, \quad y = \frac{(-1)^{n-2} | a_1 c_2 \ldots h_{n-1} |}{| a_1 b_2 \ldots g_{n-1} |}; \text{ ec.}$$

Ora se tutti gli ultimi termini h sieno nulli, tranne che $h_1 = -1$ sarà

$$x = \frac{-\mid b_2 c_3 \ldots g_{n-1} \mid h_1}{\mid a_1 b_2 \ldots g_{n-1} \mid} = \mathrm{D}_{a_1} \lg \mid a_1 b_2 \ldots g_{n-1} \mid ,$$

$$y = \frac{\mid a_2 c_3 \ldots g_{n-1} \mid h_1}{\mid a_1 b_2 \ldots g_{n-1} \mid} = \mathrm{D}_{b_1} \lg \mid a_1 b_2 \ldots g_{n-1} \mid , \text{ ec.}$$

indicando con $\mathrm{D}\lg$ la derivata del logaritmo iperbolico, cioè la derivata divisa per la quantità. Che se invece tutti gli ultimi termini sieno nulli tranne che $h_2 = -1$ sarà

$$x = \frac{\mid b_1 c_2 \ldots g_{n-1} \mid h_2}{\mid a_1 b_2 c_3 \ldots d_{n-1} \mid} = \mathrm{D}_{a_2} \lg \mid a_1 b_2 \ldots g_{n-1} \mid , \text{ ecc.}$$

§ 22. *Ulteriore riduzione di un determinante alle sue derivate*. Analogamente al § 10 indichiamo con $\mathrm{D}^2_{a_1 b_2} \mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid$ il coefficiente di $a_1 b_2$ nello sviluppo del determinante, esso è per conseguenza la *derivata seconda* del determinante presa una volta rispetto ad a_1 ed una volta rispetto a b_2. Siccome ad ogni termine contenente $a_1 b_2$ vi corrisponde uno di segno opposto contenente $a_2 b_1$, così sarà

$$(1) \qquad \mathrm{D}^2_{a_1 b_2} \mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid = -\mathrm{D}^2_{a_2 b_1} \mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid .$$

Questa derivata seconda $\mathrm{D}^2_{a_1 b_2}$, che moltiplica $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \mid a_1 b_2 \mid$ potrebbe considerarsi come la derivata del determinante $\mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid$ rispetto al determinante minore $\mid a_1 b_2 \mid$; similmente la derivata terza $\mathrm{D}^3_{a_1 b_2 c_3} \mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid$ moltiplica nello sviluppo di $\mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid$ i sei termini del determinante di 3.° grado $\mid a_1 b_2 c_3 \mid$.

§ 23. Considerando che ogni termine del $\mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid$ contiene due elementi delle due prime righe, sarà facile persuadersi che

$$\mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid = (\mid a_1 b_2 \mid \mathrm{D}_{a_1 b_2} + \mid a_1 c_2 \mid \mathrm{D}^2_{a_1 c_2} \ldots + \mid b_1 c_2 \mid \mathrm{D}^2_{b_1 c_2} + \ldots) \mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid$$

I coefficienti dei $\mid a_1 b_2 \mid$, ossia le derivate seconde sono determinanti di due gradi inferiori del proposto, sicchè si ha

$$\mid a_1 b_2 c_3 \ldots \mid = \mid a_1 b_2 \mid . \mid c_3 d_4 \ldots \mid - \mid a_1 c_2 \mid . \mid b_3 d_4 \ldots \mid + \ldots$$
$$+ \mid b_1 c_2 \mid . \mid a_3 d_4 \ldots \mid - \text{ec.}$$

ad ogni termine del secondo membro si dà il segno, che nel primo membro ha

il termine formato dalla sua diagonale; così al secondo termine si dà il segno —, perchè tale è il segno di $a_1 c_2 b_3 d_4 \ldots = a_1 b_3 c_2 d_4 \ldots$. — Un analogo sviluppo può farsi in termini della forma

$$| a_1 b_2 c_3 | \, D^3_{a_1 b_2 c_3} \, | a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots | = | a_1 b_2 c_3 | \, . \, | d_4 \ldots | :$$

inoltre i determinanti dei secondi membri possono ulteriormente ridursi a somme di prodotti di altri determinanti di grado meno elevato.

§ 24. I termini del determinante possono anche separarsi in quelli che contengono il primo elemento ed in quelli che contengono un elemento della prima riga ed uno della prima colonna combinati in tutti i modi possibili, cioè

$$| a_1 b_2 c_3 \ldots h_n | = (a_1 D_{a_1} + a_2 b_1 D^2_{a_2 b_1} + a_2 c_1 D^2_{a_2 c_1} \ldots\ldots$$

$$\ldots + a_2 h_1 D^2_{a_2 b_1} + a_3 b_1 D^2_{a_3 h_1} \ldots + a_3 h_1 D_{a_3 h_1} \ldots + a_n h_1 D^2_{a_n h_1} \; | a_1 b_2 c_3 \ldots h_n | \; ;$$

infatti è facile assicurarsi che ogni termine del primo membro è contenuto nel secondo. In luogo di $D^2_{a_2 b_1}, \ldots D^2_{a_n b_1}$ possono porsi le loro eguali (§ 22)

$$- D^2_{a_1 b_2}, \ldots - D^2_{a_1 h_n}.$$

§ 25. Ogni determinante può ridursi eziandio al termine formato dagli elementi della diagonale, ed a determinanti che hanno gli elementi della diagonale tutti nulli. Infatti se gli elementi della prima riga si separano nelle due parti $a_1 \, 0 \, 0$, $0 \, b_1 \, c_1$ anche il determinante si spartisce in due

$$| a_1 b_2 c_3 | = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

dei quali il primo non è altro che $a_1 \, | b_2 c_3 |$; ripetendo una simil partizione sugli elementi che hanno l'indice 2 si ottiene

$$| a_1 b_2 c_3 | = a_1 b_2 c_3 + a_1 \begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

E facendo una simile spartizione sulle ultime righe

$$| a_1 b_2 c_3 | = a_1 b_2 c_3 + a_1 \begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ b_3 & 0 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}.$$ Simili riduzioni valgono pei gradi superiori.

§ 26. *Somma di alcuni determinanti.* Se alcuni determinanti abbiano parecchiè righe identiche, unendo insieme tutte le righe disuguali ed aggiungendo tante colonne quant' è necessario per formare un determinante si potrà spesse volte scegliere gli elementi aggiunti in modo che l' unico determinante uguagli la somma dei dati. Servano d' esempio

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

che si ridurranno al $| a_1 b_2 c_3 d_4 |$, purchè si determinino le $c\ d$ mediante le equazioni

$$| c_3 d_4 | = 1, -| c_2 d_4 | = 1, -| c_1 d_3 | = 1, | c_1 d_2 | = 1$$
$$| c_1 d_4 | = 0, | c_2 d_3 | = 0$$

così quella somma può esprimersi con

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & -2 & -1 \\ a_3 & b_3 & 2 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

§ 27. Diamo un altro esempio delle trasformazioni che possono farsi subire ai determinanti. Abbiasi il determinante

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x \\ a_2 & b_2 & c_2 & x^2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x^3 \end{vmatrix}$$

nel quale gli elementi di una colonna formano una progressione geometrica. Pel corollario del § 16 agli elementi di ciascuna riga possono ordinatamente sottrarsi quelli della riga precedente moltiplicati per x, nel qual modo gli elementi dell' ultima colonna divengono $1, o, o, o$, sicchè si può ommettere tutta

la prima riga, il cui ultimo termine (il solo che entri nei termini non nulli) è l'unità, ed il determinante si riduce a grado inferiore, cioè a

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_0 x, & b_1 - b_0 x, & c_1 - c_0 x \\ a_2 - a_1 x, & b_2 - b_1 x, & c_2 - c_1 x \\ a_3 - a_2 x, & b_3 - b_2 x, & c_3 - c_2 x \end{vmatrix}$$

Col mezzo della spartizione generale data al § 13 questo (2) si spartisce mediante il § 8 nei quattro

$$(3) \quad | a_1 b_2 c_3 | - | a_0 b_2 c_3 | x + | a_0 b_1 c_3 | x^2 - | a_0 b_1 c_2 | x^3$$

(giacchè gli altri quattro determinanti si (§ 14) annullano). Se ora fosse proposto di sommare insieme i quattro determinanti (3), osserveremmo che essi sono formati colle sole quattro righe

$$a_0 b_0 c_0, \quad a_1 b_1 c_1, \quad a_2 b_2 c_2, \quad a_3 b_3 c_3$$

unendole insieme ed aggiungendovi una quarta colonna, ci sarà facile pervenire al determinante (1), da cui siamo partiti, e che può scriversi

$$| a_0 b_1 c_2 x^3 |$$

intendendo che nella x l'indice passi sempre ad esponente.

§ 28. *Volume di un tetraedro espresso col mezzo delle coordinate ortogonali dei suoi vertici.* Se $x_1 y_1 z_1$ sieno le coordinate del punto A, $x_2 y_2 z_2$ quelle del punto B, ec. il volume del tetraedro $OABC$, che ha un vertice nell'origine O delle coordinate è (veggasi il § 63)

$$\tfrac{1}{6} | x_1 y_2 z_3 | .$$

Ora un qualunque tetraedro $ABCD$ eguaglia la somma algebrica (veggasi la Nota § *xj*) dei tetraedri

$$OBCD + AOCD + ABOD + ABCO =$$
$$= OBCD + OADC + OABD + OACB ;$$

perciò il sestuplo del volume $ABCD$ è la somma dei quattro determinanti

$$| x_2 y_3 z_4 | + | x_1 y_4 z_3 | + | x_1 y_2 z_4 | + | x_1 y_3 z_2 | ,$$

i quali essendo formati con sole quattro righe differenti di elementi si riuniscono nell' unico

$$|\, 1_1\, x_2\, y_3\, z_4 \,|$$

intendendosi che l' unità con qualunque indice sia $= 1$.

§ 29. *Prodotto dei volumi di due poliedri espresso col mezzo delle distanze dei loro vertici.* Fino dal 1834 io dimostrai (*Annali delle scienze del Regno L.-V. T. IV, pag.* 256) con facili considerazioni geometriche parecchi teoremi, alcuni dei quali sono conosciuti sotto il nome di Standt, che li pubblicava soltanto nel 1842 (*J: Crelle* T. XXIV). Secondo uno di questi teoremi il prodotto dei volumi di due poliedri è espresso dalla somma di tutti i determinanti

$$-\frac{1}{288}\begin{vmatrix} (Aa)^2, & (Ab)^2, & (Ac)^2 \\ (Ba)^2, & (Bb)^2, & (Bc)^2 \\ (Ca)^2, & (Cb)^2, & (Cc)^2 \end{vmatrix}$$

che si ottengono combinando ciascuna faccia, o porzione di faccia, triangolare ABC del primo poliedro con ciascuna faccia, o porzione di faccia, triangolare del secondo poliedro; avvertendo che le tre lettere ABC girino nello stesso verso delle abc quando si osservano dalle parti esterne dei poliedri. Ora, se nel primo poliedro vi sia la faccia quadrilatera $ABCD$, che risulta dai due triangoli ABC, ACD, i due corrispondenti determinanti si sommano (§ 12) nell' unico

$$\frac{-1}{288}\begin{vmatrix} (Aa)^2 & (Ab)^2 & (Ac)^2 \\ (Ba)^2-(Da)^2, & (Bb)^2-(Db)^2, & (Bc)^2-(Dc)^2 \\ (Ca)^2 & (Cb)^2 & (Cc)^2 \end{vmatrix}$$

E se anche nel secondo poliedro siavi la faccia quadrilatera $abcd$, i due determinati relativi ad abc ed acd si sommeranno ancora (§ 12) in uno solo, sicchè la combinazione di $ABCD$ con $abcd$ darà

$$\frac{-1}{288}\begin{vmatrix} (Aa)^2 & (Ab)^2-(Ad)^2 & (Ac)^2 \\ (Ba)^2-(Da)^2, & (Bb)^2-(Db)^2-(Bd)^2+(Dd)^2, & (Bc)^2-(Dc)^2 \\ (Ca)^2 & (Cb)^2-(Cd)^2 & (Cc)^2 \end{vmatrix}$$

§ 30. Teorema. *La derivata seconda moltiplicata pel determinante eguaglia il determinante di quattro derivate prime;* cioè

$$(1) \qquad P\,\mathrm{D}^2_{a_1 b_2} P = |\, \mathrm{D}_{a_1} P , \mathrm{D}_{b_2} P \,|$$

essendo $P = |\, a_1 \, b_2 \, c_3 \ldots |$. Infatti le equazioni (1) dei § 10, 18

$$P = (a_1 \mathrm{D}_{a_1} + b_1 \mathrm{D}_{b_1} + c_1 \mathrm{D}_{c_1} + \ldots) P$$

$$0 = (a_2 \mathrm{D}_{a_1} + b_2 \mathrm{D}_{b_1} + c_2 \mathrm{D}_{c_1} + \ldots) P$$

$$0 = (a_3 \mathrm{D}_{a_1} + b_3 \mathrm{D}_{b_1} + c_3 \mathrm{D}_{c_1} + \ldots) P \text{, ecc.}$$

moltiplicate rispettivamente per $\mathrm{D}^2_{a_1 b_2} P$, $\mathrm{D}^2_{a_2 b_2} P$, $\mathrm{D}^2_{a_3 b_2} P$, ecc. poi sommate danno

$$P\mathrm{D}^2_{a_1 b_2} P = \mathrm{D}_{a_1} P . \mathrm{D}_{b_2} P - \mathrm{D}_{a_2} P . \mathrm{D}_{b_1} P$$

giacchè nel secondo membro la $\mathrm{D}_{a_1} P$ riesce moltiplicata per

$$a_1 \mathrm{D}^2_{a_1 b_2} P + a_2 \mathrm{D}^2_{a_2 b_2} P + a_3 \mathrm{D}^2_{a_3 b_2} P + \ldots\ldots,$$

che per una formula analoga alla (2) del § 10 si riduce

$$(a_1 \mathrm{D}_{a_1} + a_2 \mathrm{D}_{a_2} + a_3 \mathrm{D}_{a_3} \ldots\ldots) \mathrm{D}_{b_2} P = \mathrm{D}_{b_2} P \;;$$

il moltiplicatore di $\mathrm{D}_{b_1} P$ si riduce mediante la (1) del § 22 poscia la (2) del § 10 a

$$-(b_1 \mathrm{D}_{b_1} + b_2 \mathrm{D}_{b_2} + b_3 \mathrm{D}_{b_3} \ldots\ldots) \mathrm{D}_{a_2} P = - \mathrm{D}_{a_2} P \;;$$

finalmente i moltiplicatori di $\mathrm{D}_{c_1} P$; $\mathrm{D}_{d_1} P$, ec. sono nulli, giacchè pel § 18 si ha

$$(c_1 \mathrm{D}_{a_1} + c_2 \mathrm{D}_{a_2} + c_3 \mathrm{D}_{a_3} + \ldots.) \mathrm{D}_{b_2} P = 0.$$

Corollario. *Se un determinante è nullo, lo è pure ogni determinante* $|\, \mathrm{D}_{a_1} P , \mathrm{D}_{b_2} P \,|$ *formato con quattro sue derivate prime.*

§ 31. Teorema. *Il prodotto di due determinanti dello stesso grado è uguale ad un determinante, i cui elementi sono le somme dei prodotti degli elementi di ciascuna colonna del primo determinante pei corrispondenti elementi di ciascuna colonna del secondo;* cioè

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \ , & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 \ , & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 \ , & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 \ , & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \ , & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 \ , & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Infatti quest' ultimo determinante può spartirsi (§13) in 27 determinanti, dei quali si annullano pel § 14 tutti quelli che come

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\beta_1 & a_2\gamma_2 \\ b_1\alpha_1 & b_1\beta_1 & b_2\gamma_2 \\ c_1\alpha_1 & c_1\beta_1 & c_2\gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

hanno due colonne, che differiscono soltanto per un differente moltiplicatore (nel precedente determinante la prima colonna ha il moltiplicatore α_1 e la seconda il moltiplicatore β_1), e rimangono i soli sei determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\beta_2 & a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 & b_2\beta_2 & b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 & c_2\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_3\beta_3 & a_2\gamma_2 \\ b_1\alpha_1 & b_3\beta_3 & b_2\gamma_2 \\ c_1\alpha_1 & c_3\beta_3 & c_2\gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2\alpha_2 & a_1\beta_1 & a_3\gamma_3 \\ b_2\alpha_2 & b_1\beta_1 & b_3\gamma_3 \\ c_2\alpha_2 & c_1\beta_1 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} + \text{ec.}$$

dal quali pel § 8 possono estrarsi i moltiplicatori di ciascuna colonna; si ha per tal maniera la somma

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 \,|\, a_1 b_2 c_3 \,| + \alpha_1\beta_3\gamma_2 \,|\, a_1 b_3 c_2 \,| + \alpha_2\beta_1\gamma_3 \,|\, a_2 b_1 c_3 \,| + \text{ec.}$$

i cui determinanti sono pel § 6 tutti eguali a $\pm \,|\, a_1 b_2 c_3 \,|$, ed è facile scorgere che il moltiplicatore di $|\, a_1 b_2 c_3 \,|$ è precisamente

$$|\, \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \text{ec.} = |\, \alpha_1\beta_2\gamma_3 \,| \,.$$

§ 32. Non sarà inutile notare che se nel determinante del § precedente ogni elemento contenesse un numero di termini inferiore al grado, il determinante sarebbe nullo; tale è per esempio

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Vale la stessa dimostrazione; e il determinante può anche considerarsi come il prodotto dei due determinanti nulli

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ 0\ 0\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ 0\ 0\ 0 \end{vmatrix} .$$

§ 33. *Somma di prodotti di determinanti.* Se per lo contrario il numero m degli indici sia maggiore del numero n delle lettere, e si abbia per esempio il determinante

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma a\alpha\ , & \Sigma a\beta\ , & \Sigma a\gamma \\ \Sigma b\alpha\ , & \Sigma b\beta\ , & \Sigma b\gamma \\ \Sigma c\alpha\ , & \Sigma c\beta\ , & \Sigma c\gamma \end{vmatrix} = |\ A_\alpha B_\beta C_\gamma\ |$$

dove sia

$$A_\alpha = \Sigma a\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 \ldots . + a_m \alpha_m\ ,$$
$$A_\beta = \Sigma a\beta = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 \ldots . + a_m \beta_m\ , \text{ ec.}$$

esso si spartirà (§ 13) in $m^n = m^3$ determinanti, dei quali non si annullano soltanto quei
$m(m-1)(m-2) \ldots . (m-n+1)$, che corrispondono ad una delle permutazioni, che si hanno scegliendo (tra gli m indici) $n = 3$ indici tra loro disuguali. I determinanti in numero di $1.2 \ldots . n = 1.2.3$, che risultano dalle permutazioni formate coi medesimi n indici hanno la somma eguale (§ 31) al prodotto di due determinanti; perciò il determinante

$$(1) \qquad |\ \Sigma a\alpha\ ,\ \Sigma b\beta\ ,\ \Sigma c\gamma\ |$$

si riduce a $\dfrac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{1.2 \ldots n}$ prodotti di due determinanti corrispondenti a ciascuna delle combinazioni ad n ad n che si possono formare cogli n indici, cioè a

$$|\ a_1 b_2 c_3| \cdot |\alpha_1 \beta_2 \gamma_3\ | + |\ a_1 b_2 c_4| \cdot |\alpha_1 \beta_2 \gamma_4\ | + |\ a_1 b_3 c_4| \cdot |\alpha_1 \beta_3 \gamma_4\ | +$$
$$+ |\ a_2 b_3 c_4| \cdot |\alpha_2 \beta_3 \gamma_4\ | + |\ a_1 b_2 c_5| \cdot |\alpha_1 \beta_2 \gamma_5\ | + \text{ec.}$$

$$= \Sigma^2 \left\| \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ \cdots\cdots \\ a_m b_m c_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \cdots\cdots \\ \alpha_m \beta_m \gamma_m \end{vmatrix} \right\|$$

Ciò forma un' importante estensione al teorema del § 31.

§ 34. Se nella formula (1) del § 31, che dà il prodotto di due determinanti, e che noi scriveremo per brevità così

$$(1) \qquad | a_1 b_2 c_3 \ldots | \cdot | \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots | = | A_\alpha B_\beta C_\gamma \ldots |$$

essendo $A_\beta = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \text{ec.},$
$B_\alpha = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \text{ec.}, \text{ ec.}$

noi prendiamo ad arbitrio due colonne verticali del primo determinante e due colonne nel secondo, ne formiamo tutti i possibili determinanti di 2.° grado, e moltiplichiamo tra loro i corrispondenti, la somma di tutti questi prodotti eguaglia, in forza del teorema del § 33, il determinante di 2.° grado formato cogli elementi del terzo determinante, che risultano da quelle quattro colonne, così per esempio

$$\Sigma^1 \left\| \begin{vmatrix} b_1 d_1 \\ b_2 d_2 \\ b_3 d_3 \\ \cdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \\ \cdots \end{vmatrix} \right\| = \begin{vmatrix} B_\alpha D_\alpha \\ B_\beta D_\beta \end{vmatrix} = | B_\alpha D_\beta |$$

dove il primo membro esprime la somma di tutti i prodotti

$$\begin{vmatrix} b_1 d_1 \\ b_2 d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 d_1 \\ b_3 d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 d_2 \\ b_3 d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix} + \text{ec.}$$

Serva di altro esempio

$$\Sigma^3 \left\| \begin{vmatrix} a_1 c_1 e_1 \\ a_2 c_2 e_2 \\ a_3 c_3 e_3 \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} \right\| = | A_\alpha C_\beta E_\gamma |$$

§ 35. Quando i due determinanti sono identici in ogni loro parte la formula (1) diventa.

$$| a_1 b_2 c_3 \ldots |^2 = | A_a B_b C_c \ldots |$$

nel secondo membro i termini della diagonale sono somme di quadrati cioè

$$A_a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \text{ec.}\;,\ \text{ec.}$$

ed i termini fuori della diagonale sono a due a due uguali, cioè

$$B_a = A_b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\;,\ \text{ec.}$$

Una qualunque derivata del determinante $| A_a B_b \ldots |$ presa rispetto ad alcuno degli elementi della sua diagonale è pel § precedente

$$D_{A_a} | A_a B_b C_c D_d | = | B_b C_c D_d | = \Sigma^3 \left\| \begin{array}{c} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{array} \right\| =$$

$$= | b_1 c_2 d_3 |^2 + | b_1 c_2 d_4 |^2 + | b_1 c_3 d_4 |^2 + | b_2 c_3 d_4 |^2 ,$$

$$D_{A_a^2 B_b} | A_a B_b C_c D_d | = | C_c D_d | = \Sigma^2 \left\| \begin{array}{c} c_1 d_1 \\ c_2 d_2 \\ c_3 d_3 \\ c_4 d_4 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} c_1 d_1 \\ c_2 d_2 \\ c_3 d_3 \\ c_4 d_4 \end{array} \right\| =$$

$$= | c_1 d_2 |^2 + | c_1 d_3 |^2 + | c_2 d_3 |^2 + | c_1 d_4 |^2 + \text{ec.}$$

$$D_{A_a^3 B_b C_c} | A_a B_b C_c D_d | = D_d = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \;,\ \text{dunque:}$$

Teorema. *Il determinante che si ottiene* (§ 31) *formando il quadrato di un determinante ha le sue derivate rispetto agli elementi della diagonale tutte uguali a somme di quadrati; e perciò positive.*

§ 36. Teorema. *Il prodotto di due determinanti* $P\,Q$ *dell'* n^{esimo} *grado è uguale alla somma degli n prodotti dei determinanti, nei quali si cangia* P *sostituendo alla sua prima riga ciascuna riga di* Q, *pei corrispondenti* Q, *nei quali la riga trasportata in* P *rimane sostituita dalla prima riga di* P.

La dimostrazione fondata sulla riduzione dei determinanti data al § 10 e sul § 18 apparisce abbastanza dal caso di

$$P = |\, a_1 b_2 c_3 \,|\ ,\quad Q = |\, \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \,|$$

dove $|\, \alpha_1 b_2 c_3 \,|$ significa $\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$, ec.

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & |\alpha_1 b_2 c_3| \cdot |a_1 \beta_2 \gamma_3| + |\alpha_2 b_2 c_3| \cdot |\alpha_1 b_1 \gamma_3| + |\alpha_3 b_2 c_3| \cdot |\alpha_1 \beta_2 c_1| = \\
& = (\alpha_1 \mathrm{D}_{a_1} P + \beta_1 \mathrm{D}_{b_1} P + \gamma_1 \mathrm{D}_{c_1} P)(a_1 \mathrm{D}_{\alpha_1} Q + b_1 \mathrm{D}_{\beta_1} Q + c_1 \mathrm{D}_{\gamma_1} Q) + \\
& + (\alpha_2 \mathrm{D}_{a_1} P + \beta_2 \mathrm{D}_{b_1} P + \gamma_2 \mathrm{D}_{c_1} P)(a_1 \mathrm{D}_{\alpha_2} Q + b_1 \mathrm{D}_{\beta_2} Q + c_1 \mathrm{D}_{\gamma_2} Q) + \\
& + (\alpha_3 \mathrm{D}_{a_1} P + \beta_3 \mathrm{D}_{b_1} P + \gamma_3 \mathrm{D}_{c_1} P)(a_1 \mathrm{D}_{\alpha_3} Q + b_1 \mathrm{D}_{\beta_3} Q + c_1 \mathrm{D}_{\gamma_3} Q) = \\
& = (a_1 Q \mathrm{D}_{a_1} P + b_1 Q \mathrm{D}_{b_1} P + c_1 Q \mathrm{D}_{c_1} P = PQ\ ;
\end{aligned}
$$

perchè il coefficiente di $\mathrm{D}_{a_1} P$ è composto delle parti

$$
\begin{aligned}
a_1 (\alpha_1 \mathrm{D}_{\alpha_1} Q + \alpha_2 \mathrm{D}_{\alpha_2} Q + \alpha_3 \mathrm{D}_{\alpha_3} Q) &= a_1 Q \\
b_1 (\alpha_1 \mathrm{D}_{\beta_1} Q + \alpha_2 \mathrm{D}_{\beta_2} Q + \alpha_3 \mathrm{D}_{\beta_3} Q) &= 0 \\
c_1 (\alpha_1 \mathrm{D}_{\gamma_1} Q + \alpha_2 \mathrm{D}_{\gamma_2} Q + \alpha_3 \mathrm{D}_{\gamma_3} Q) &= 0
\end{aligned}
$$

e così degli altri. — Corollario. *Se i secondi fattori si ottengano ponendo in Q una riga di P diversa dalla prima, la somma dei prodotti sarà nulla;* poichè a ciò si riduce il primo membro della (1) quando il determinante P abbia un' altra riga eguale alla sua prima, nel qual caso esso è (§ 14) nullo.

§ 37. Se $a_1 b_1 c_1$ sono le coordinate ortogonali del punto M_1, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ quelle del punto N_1, ecc. la equazione del precedente teorema, posto attenzione a quanto si disse al principio del § 28 dà la seguente relazione tra i volumi dei tetraedri con un vertice nell' origine O delle coordinate

$$
\begin{aligned}
& ON_1M_2M_3 \,.\, OM_1N_2N_3 + ON_2M_2M_3 \,.\, ON_1M_1N_3 + \\
& + ON_3M_2M_3 \,.\, ON_1N_2M_1 = OM_1M_2M_3 \,.\, ON_1N_2N_3\ .
\end{aligned}
$$

§ 38. *Calcolo numerico di un determinante.* Invece dello sviluppo dato al § 4 o delle riduzioni insegnate nei §§ 11, 23, tornerà più comodo ridurre successivamente il determinante ad altri di gradi inferiori come ora vedremo. Se nelle equazioni (II) del § 1 col mezzo della prima eliminiamo l' incognita x dalle successive equazioni otteniamo le

$$|a_1 b_2|\, y + |a_1 c_2| = 0$$
$$|a_1 b_3|\, y + |a_1 c_3| = 0$$

ed il determinante $\begin{vmatrix} |a_1 b_2|, & |a_1 c_2| \\ |a_1 b_3|, & |a_1 c_3| \end{vmatrix}$, che

uguagliato a zero costituisce la condizione di simultanea sussistenza di queste due equazioni, dovrà essere un multiplo del determinante $|a_1 b_2 c_3|$, che dà la condizione di simultaneità delle (II); ed infatti pel § 16 il determinante non cangia se agli elementi della seconda colonna sottriamo quelli della prima moltiplicati per $\frac{b_1}{a_1}$; e alla terza colonna sottriamo la prima moltiplicata per $\frac{c_1}{a_1}$, il che dà

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2, & b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ a_3, & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} |a_1 b_2|, & |a_1 c_2| \\ |a_1 b_3|, & |a_1 c_3| \end{vmatrix}$$

essendosi pel § 8 moltiplicati i termini di ciascúna riga per a_1. È facile vedere che in generale si ha il teorema espresso da

$$|a_1 b_2 c_3 \ldots . h_n| = \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} |a_1 b_2|, & |a_1 c_2|, & \ldots & |a_1 h_2| \\ |a_1 b_3|, & |a_1 c_3| & \ldots\ldots & |a_1 h_3| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ |a_1 b_n|, & |a_1 c_n| & \ldots . & |a_1 h_n| \end{vmatrix}$$

§ 39. Se i numeri $a_1 \ldots .$ sono espressi approssimativamente in decimali, gioverà adoperare le prime formule, cioè dividere gli elementi della prima riga pel primo elemento, poscia mediante moltipliche e sottre calcolare il secondo dei seguenti determinanti, i cui elementi disegniamo poi colle lettere $b_1' c_1'$ ec.

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 \,, & c_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 \cdots \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 \,, & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} b_1' & c_1' \cdots \\ b_2' & c_2' \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}\right|$$

Similmente calcoleremo

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & \frac{c_1'}{b_1'} & \frac{d_1'}{b_1'} & \cdots \\ b_2' & c_2' & d_2' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} c_2' - \frac{c_1'}{b_1'} b_2' \,, & d_2' - \frac{d_1'}{b_1'} b_2' \cdots \\ c_3' - \frac{c_1'}{b_1'} b_3' \,, & d_3' - \frac{d_1'}{b_1'} b_3' \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} c_1'' & d_1'' \cdots \\ c_2'' & d_2'' \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & \frac{d_1''}{c_1''} & \cdots \\ c_2'' & d_2'' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} d_2'' - \frac{d_1''}{c_1''} c_2'' \cdots \\ \cdots \quad \cdots \end{array}\right| = d_1''' \,, \text{ ec.}$$

ed avremo

$$|\, a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots \,| = a_1 b_1' c_1'' d_1''' \ldots$$

§ 40. Se invece gli elementi del determinante sieno numeri interi esatti, gioverà meglio fare un maggior numero di moltipliche ed evitare le frazioni, il che si ottiene colle formule

$$|\, a_1 b_2 c_3 \ldots h_n \,| = \frac{1}{a_1^{n-2}} \big|\, |a_1 b_2| \,, |a_1 c_2| \ldots |a_1 h_n| \,\big| = \frac{1}{a_1^{n-2}} |\, b_2' c_2' \ldots h_n' \,|$$

dove le $\quad b_1' = |\, a_1 b_2 \,| = a_1 b_2 - a_2 b_1 \,,\; c_1' = |\, a_1 c_2 \,| \,,$

$$\ldots\ldots\; b_2' = |\, a_1 b_3 \,| \,,\; c_2' = |\, a_1 c_3 \,| \,, \text{ ec., ec.}$$

hanno valori differenti da quelli del § 39. Operando nello stesso modo sul secondo determinante $|\, b_1' c_2' \ldots \,|$ gioverà dividere per a_1 tutti gli elementi del terzo determinante (il che si farà senza residui) cioè calcolare

$$\frac{1}{a^{n-2}} |\, b_1' c_2' \ldots h_{n-1} \,| = \frac{1}{b_1'^{\,n-3}} |\, c_1'' d_2'' \ldots h''_{n-2} \,|$$

facendo $\quad c_1'' = \frac{1}{a_1} |\, b_1' c_2' \,| \,,\; d_1'' = \frac{1}{a_1} |\, b_1' d_2' \,| \;\ldots\ldots$

$$c_2'' = \frac{1}{a_1} |\, b_1' c_3' \,| \,,\; d_2'' = \frac{1}{a_1} |\, b_1' d_3' \,| \;\ldots\ldots \text{ ec.}$$

Similmente calcoleremo $d_1''' = \frac{1}{b_1'} \left| c_1'' d_2'' \right|$; ecc. e l'ultimo dei

$$b_1' \,,\; c_1'' \,,\; d_1''' \ldots h_1^{(n-1)} \text{ sarà il valore di } | a_1 b_2 \ldots h_n | = h_1^{(n-1)}.$$

Ecco un esempio numerico.

$$\begin{vmatrix} 5 & +1 & -3 & +2 \\ 1 & -2 & +1 & -0 \\ 6 & +4 & -5 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & +6 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^2} \begin{vmatrix} -11 & +8 & -2 \\ 14 & -7 & -17 \\ -9 & +7 & +22 \end{vmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{vmatrix} -7 & +43 \\ -1 & -52 \end{vmatrix} = -37$$

essendo $\begin{vmatrix} 5 & +1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11 \,,\; \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & +1 \end{vmatrix} = 8$, ec. $\frac{1}{5} \begin{vmatrix} -11 & +8 \\ 14 & -7 \end{vmatrix} = -7$; ec.

II. *Determinanti simmetrici, emisimmetrici, ec., e determinanti conjugati.*

§ 41. Ogni determinante nel quale gli elementi di ciascuna colonna sieno ordinatamente eguali agli elementi di ciascuna riga lo diremo determinante *simmetrico*. Se gli elementi di ciascuna colonna sieno eguali in valore, ma opposti in segno agli elementi di ciascuna riga, il determinante potrà dirsi *emisimmetrico (gauche symétrique* del Cayley); ciò esige che gli elementi della diagonale sieno tutti nulli. Che se gli elementi della diagonale avessero dei valori quali si vogliano, e soltanto per gli elementi fuori della diagonale avesse luogo la predetta eguaglianza di valore ed opposizione di segno, il determinante sarebbe *pseudosimmetrico (gauche)*. Mediante il § 25 un determinante pseudosimmetrico si riduce a prodotti degli elementi della diagonale per determinanti emisimmetrici.

§ 42. Segnerò con $| a_a b_b \ldots h_h |$ il determinante simmetrico di $n.^{esimo}$ grado, supponendo quindi che $a_b = b_a$ ed in generale $c_f = f_c$; nel suo sviluppo (§ 4) vi saranno dei termini tra loro eguali ed altri che conterranno qualche elemento elevato al quadrato, in quanto agli elementi a_a, b_b, ... della diagonale essi rimangono sempre isolati. Supplendo col pensiero a ciò che manca nelle seguenti considerazioni si riconoscerà che

$$|a_a b_b c_c \dots h_h| = a_a b_b c_c \dots h_h - \Sigma^2 a_b^2 c_c d_d \dots h_h + \\ + 2\Sigma^3 (a_b b_c c_a) d_d \dots h_h -$$

$$- 2\Sigma^4 (a_b b_c c_d d_a + a_b b_d d_c c_a + a_c c_b b_d d_a) e_e \dots h_h + \\ + \Sigma^4 (a_b^2 c_d^2 + a_c^2 b_d^2 + a_d^2 b_c^2) e_e \dots h_h + \text{ecc.}$$

dove la caratteristica Σ^2 indica che colle n lettere a, b, $c \dots h$ deggiono formarsi tutte le combinazioni binarie; per ognuna di queste si ha il termine $a_b b_a = a_b^2$, al quale, secondo la solita regola (§ 4), spetta il segno $-$. Similmente la caratteristica Σ^3 indica la formazione di tutte le combinazioni ternarie, per ognuna delle quali si hanno i termini $a_b b_c c_a$ $a_c b_a c_b$ che si riuniscono nel $2 a_b b_c c_a$. — Per ogni combinazione quadernaria si hanno i termini $a_b b_c c_d d_a$, $a_b b_d c_a d_c$, $a_c b_a c_d d_b$, $a_c b_d c_b d_a$, $a_d b_a c_b d_c$, $a_d b_c c_a d_b$, che si riuniscono in $-2 a_b b_c c_d d_a - 2 a_b b_d d_c c_a - 2 a_c c_b b_d d_a$; inoltre per ogni combinazione binomia ab scelta tra le quattro lettere $a\ b\ c\ d$ si ha il termine $a_b b_a c_d d_c = a_b^2 c_d^2$; e niun altro termine può formarsi con quattro lettere, dovendosi escludere quelli che contengono qualche elemento della diagonale, e che sono già stati calcolati precedentemente.

§ 43. Così, per esempio, il determinante simmetrico di 2.° grado è

$$= a_a b_b - a_b^2 ,$$

quello di 3.° grado è $= a_a b_b c_c - a_b^2 c_c - a_c^2 b_b - b_c^2 a_a + 2 a_b b_c c_a$. Possono considerarsi come doppiamente simmetrici

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 , \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^2 d - 2ab^2 - c^2 d + 2b^2 c .$$

Merita pure osservazione il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = a^4 - 2a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 8abcd - \\ - 2(b^2 d^2 + b^2 c^2 + c^2 d^2) + b^4 + c^4 + d^4 ;$$

questa è una frazione simmetrica delle a, b, c, d che può esprimere con

$$\Sigma a^4 - 2\Sigma^2 a^2 b^2 + 8abcd =$$
$$-(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$$

e col segno cangiato eguaglia il quadrato del quadruplo dell' area del quadrilatero inscrivibile nel circolo coi lati a, b, c, d. Se $d=0$ il predetto determinante diventa quello del § 9.

§ 44. Teorema. *Se si cerca la quantità che deve sommarsi agli elementi della diagonale di un determinante simmetrico di n^{esimo} grado, acciocchè esso divenga eguale a zero, si perviene ad un' equazione che ha tutte le sue n radici reali.*

Infatti, se fosse possibile che l' equazione avesse una radice della forma

$$p + q\sqrt{-1},$$

sottraendo p da ciascun elemento della diagonale del proposto determinante rimarrebbe un' equazione della forma

$$\begin{vmatrix} a_a + x, & b_a & c_a \ldots\ldots \\ a_b & , b_b + x, & c_b \ldots\ldots \\ a_c & b_c & , c_c + x, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

che avrebbe una radice $x = q\sqrt{-1}$, il cui quadrato sarebbe negativo. Ora moltiplicando il primo membro di un' equazione per ciò che esso diventa mutato x in $-x$ si ottiene la sua trasformata in x^2; posto

$$| a_a b_b c_c \ldots |^2 = | A_a B_b C_c \ldots | = Q$$

il teorema sul prodotto di due determinanti (§ 31) dà

$$\begin{vmatrix} a_a + x, & b_a & c_a \ldots\ldots \\ a_b & , b_b + x, & c_b \ldots\ldots \\ a_c & , b_c & , c_c + x, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_a - x, & b_a & , c_a \ldots\ldots \\ a_b & , b_b - x, & c_b \ldots\ldots \\ a_c & , b_c & , c_c - x \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_a - x^2, & B_a, & C_a \dots \\ A_b, & B_b - x^2, & C_b \dots \\ A_c, & B_c, & C_c - x^2 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= Q - x^2 (D_{A_a} Q + D_{B_b} Q + \dots) + x^4 (D^2_{A_a B_b} Q + D^2_{A_a C_c} Q + \dots)$$
$$- x^6 (D^3_{A_a B_b C_c} Q + \dots) + \text{ec.} = 0$$

la qual equazione ha pel teorema del § 35 i termini coi segni alternativi, e perciò non può avere radici negative.

§ 45. *Determinante simmetrico formato colle somme delle potenze di alcune quantità.* Se le n quantità $a, b, c \dots h$ sono le radici dell'equazione

$$(1) \qquad x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} \dots \pm p_n = 0 ;$$

basta porle successivamente in luogo della x, poscia sommare le n equazioni per vedere che tra le somme delle potenze di tali quantità (veggansi le (1) (2) del § 7) ha luogo la relazione

$$(2) \qquad s_n - p_1 s_{n-1} + p_2 s_{n-2} \dots \pm p_n s_0 = 0$$

la quale sussiste pure se a tutti gli indici delle s si aggiunga un numero costante, come si trova adoperando la (1) moltiplicata per x^r. — Se tra le n quantità ve ne sieno di eguali, in guisa che i valori differenti sieno soltanto i avrà luogo anche la relazione più semplice

$$(3) \qquad s_{i+r} - q_1 s_{i+r-1} + q_2 s_{i+r-2} \dots \pm q_i s_r = 0 .$$

Infatti se, per fissare le idee, le $n = 6$ quantità abbiano 3 valori eguali ad a, 2 eguali a b, ed uno eguale a c sarà

$$s_r = 3a^r + 2b^r + c^r ,$$

ed allora pel § 32 ogni determinante della forma

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{vmatrix} , \text{ ec.}$$

e di grado $(i+1)^{esimo}=4.^o$ (o superiore) sarà eguale a zero, e quindi pel § 15 esisterà una medesima relazione lineare della forma (3) tra gli elementi di ciascuna riga di tutti questi determinanti.

§ 46. Teorema. *Tra i predetti determinanti simmetrici formati colle somme delle potenze, quelli che sono del grado i.^{esimo} sono eguali al quadrato della funzione alterna* $\Pi=(b-a)(c-b)(c-a)\ldots$ (§ 7) *relativa ai valori disuguali* $a, b, c\ldots$ *moltiplicata per una potenza del prodotto* $q_i=abc\ldots$ *di tali valori, e pel prodotto dei loro numeri di moltiplicità.*

Infatti supposto, come sopra, che $s_r=3a^r+2b^r+c^r$, la formula del prodotto di due determinanti (§ 31) dimostra che essendo

$$s_0=n=6\,,\ s_1=3a+2b+c\,,\ s_2=3a^2+2b^2+c^2\,,\ \text{ec. si ha}$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3a & 3a^2 \\ 2 & 2b & 2b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 3.2.1\,\Pi^2.$$

Così pure, per esempio

$$\begin{vmatrix} s_5 & s_6 & s_7 \\ s_6 & s_7 & s_8 \\ s_7 & s_8 & s_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3a & 3a^2 \\ 2 & 2b & 2b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^5 & a^6 & a^7 \\ b^5 & b^6 & b^7 \\ c^5 & c^6 & c^7 \end{vmatrix} = 6q_3^5\,\Pi^2.$$

Gli altri determinanti di grado inferiore possono ridursi (mediante il teorema del § 33) ad una somma di quadrati di funzioni alterne relative a combinazioni dei valori $a, b, c\ldots$

§ 47. L' equazione che ha le n radici $a\,b\,c\ldots h$ è

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}\ldots\pm p_n=0\,,$$

i coefficienti p essendo le funzioni simmetriche date al § 7. Moltiplicando il primo membro per la frazione alterna (§ 7)

$$\Pi=(b-a)(c-b)(c-a)\ldots=|\,a^0b^1c^2\ldots h^{n-1}\,|$$

esso diviene una frazione alterna tra le $(n+1)$ quantità $a, b, \ldots h, x$, perciò è

$$(1) \qquad | a^0 b^1 c^2 \ldots h^{n-1} x^n | = (x^n - p_1 x^{n-1} \ldots \pm p_n)\, \Pi \; .$$

Col mezzo della riduzione di un determinante ad altri di grado inferiore (§ 11), si può sviluppare il primo membro secondo le potenze della x, dopo di che paragonando col secondo membro si ha

$$(2) \qquad \begin{array}{l} | a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^n | = p_1 \Pi \\ | a^0 b^1 c^2 \ldots f^{n-3} g^{n-1} h^n | = p_2 \Pi \; . \\ \ldots\ldots \\ | a^0 b^1 c^3 \ldots h^n | = p_{n-2} \Pi \\ | a^0 b^2 c^3 \ldots h^n | = p_{n-1} \Pi \\ | a^1 b^2 c^3 \ldots h^n | = p_n \Pi \end{array}$$

Questo è un teorema dato dal Mainardi (*Ann. Tortolini*, febbr. 1850 I, pag. 76) che ora avremo occasione di adoperare. — Le (2) possono anche dimostrarsi mediante le formule del § 27; infatti, se gli indici delle $a\ b\ c$ si passano ad esponenti le colonne 1.ª 2.ª e 3.ª della (2) di quel § sono rispettivamente divisibili per $a-x$, $b-x$, $c-x$, sicchè essa diventa

$$-| a^0 b^1 c^2 |\, (x-a)(x-b)(x-c) = -\Pi\, (x^3 - p_1 x^2 + p_2 x - p_3)$$

che paragonata colla (3)

$$| a^1 b^2 c^3 | - | a^0 b^2 c^3 |\, x + | a^0 b^1 c^3 |\, x^2 - | a^0 b^1 c^2 |\, x^3$$

dà le precedenti (2).

§ 48. Troveremo dei teoremi analoghi ai precedenti moltiplicando la (1) per Π: nel secondo membro Π^2 sarà espresso da un determinante simmetrico formato colle somme delle potenze, come vedemmo nel § 46 (ora supponiamo che tutte le $a, b, \ldots h$ sieno disuguali); per moltiplicare il primo membro

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n & b^n & \ldots & x^n \end{array} \right|$$

daremo a Π la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 & 0 \\ a & b \dots h & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} \; h^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \;\; 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e la solita espressione (§ 31) del prodotto di due determinanti (moltiplicando ciascuna riga dell'uno per ciascuna riga dell'altro) ci darà

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} = (x^n + p_1 x^{n-1} \dots \pm p_n) \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Questa formula del Joachimsthal (*J. Crelle* 1856, T. 48, N. 25) può dare, nello stesso modo della (1) del § 47, i coefficienti p espressi da rapporti di determinanti di $n.^{esimo}$ grado.

§ 49. Supponiamo di nuovo che le $n = 6$ quantità sieno a, a, a, b, b, c per determinare i coefficienti q delle (3) del § 45, paragoneremo le equazioni per $r = 0, 1, 2$ alle (III) del § 20, e vedremo che q_3, q_2, q_1 sono rispettivamente eguali ai determinanti

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_4 & s_5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_5 \end{vmatrix}$$

divisi pel

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 6\,\Pi^2$$

essendo (§ 46) $\qquad \Pi = | a^0 b^1 c^2 | = (b-a)(c-b)(c-a).$

Col solito teorema sul prodotto di due determinanti come si dimostrò (§ 46) che il primo determinante è $= 6\,abc\Pi^2$, così pure si trova che il secondo è

$$\begin{vmatrix} 6 & 3a^2+2b^2+c^2 & 3a^3+2b^3+c^3 \\ 3a+2b+c & 3a^3+2b^3+c^3 & 3a^4+2b^4+c^4 \\ 3a^2+2b^2+c^2 & 3a^4+2b^4+c^4 & 3a^5+2b^5+c^5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 3a & 3a^2 \\ 2 & 2b & 2b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

e per la penultima delle (2) del § 47 esso è $= 6\,\Pi^2\,(ab+ac+bc)$, dunque

$$q_2 = ab + ac + bc.$$

Egualmente si trova $q_1 = a + b + c$. Determinati in tal modo i coefficienti della (3) del § 45 si ha ((2) del § 45) il teorema: *Le somme delle potenze di quante si vogliano quantità, di cui alcune sieno tra loro uguali, formano una serie ricorrente, la cui scala di relazione è quella stessa che compete alla sómma delle potenze dei soli valori differenti di quelle quantità.*

§ 50. Facciamo un' applicazione alle radici dell' equazione

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 = 0 .$$

Le somme delle potenze di tali radici si calcolano nel seguente modo. Scritti i coefficienti dell' equazione (dei quali il primo dev' essere $+1$), porremo al di sotto in una riga obbliqua discendente i coefficienti del 2.° del 3.°... del 6.° termine moltiplicati rispettivamente per $1, 2 \ldots 5$; poscia nella prima riga orizzontale scriveremo 4 che col -4 già scritto dà la somma 0; questo 4 moltiplicato pei coefficienti dell' equazione ci darà

$$-16 + 4 + 40 - 16 - 32 ,$$

che scriveremo in una riga obbliqua discendente; nella seconda riga orizzontale scriveremo 14 che coi $-16+2$ già scritti dà la somma 0; i prodotti di questo 14 pei coefficienti dell' equazione li scriveremo in una riga obbliqua discendente; e continuando sempre nello stesso ordine, i numeri della prima colonna ci daranno

$$s_1 = 4 , s_2 = 14 , s_3 = 22 , s_4 = 50 , s_5 = 94 .$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 - & 4 + & 1 + & 10 - & 4 - & 8 \\
0 = & 4 - & 4 & & & & \\
0 = & 14 - & 16 + & 2 & & & \\
0 = & 22 - & 56 + & 4 + & 30 & & \\
0 = & 50 - & 88 + & 14 + & 40 - & 16 & \\
0 = & 94 - & 200 + & 22 + & 140 - & 16 - & 40 \\
0 = & 194 - & 376 + & 50 - & 220 - & 56 - & 32 \\
0 = & 382 - & 776 + & 94 - & 500 - & 88 - & 112 \\
0 = & 770 - & 1528 + & 194 - & 940 - & 200 - & 176
\end{array}$$

Calcoleremo adesso (§ 40) i determinanti simmetrici

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 54$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 22 \\ 14 & 22 & 50 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 54 & 54 \\ 54 & 54 \end{vmatrix} = 0$$

dall' annullarsi di questo dedurremo (§ 15) che la serie $s_0 \, s_1 \, s_2 \, s_3 \, s_4$ è ricorrente colla scala di relazione di tre soli termini, che facilmente si trova (§ 15) essere

$$(1) \qquad s_4 - s_3 - 2s_2 = 0.$$

Siccome alla stessa legge sono sottoposti anche i numeri $s_5 \, s_6 \, s_7 \, s_8$, giacchè $s_5 - 50 - 2 \, . \, 22 = 0$, ecc., così conchiuderemo (§ 49) che le radici della proposta equazione, quantunque in numero di cinque, pure hanno due soli valori differenti, e che questi sono le radici dell' equazione

$$(2) \qquad x^2 - x - 2 = 0 \, .$$

(i cui coefficienti 1 e -2 sono (§ 49) quelli della relazione (1)). Ne dedurremo pure (§ 46) che il prodotto dei numeri di moltiplicità delle radici dell' equazione proposta è 6, tale essendo $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = 54$ diviso pel quadrato 9 della differenza dei valori 2 e -1, che sono le radici della (2), il qual nu-

mero 9 è dato dal determinante $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9$ corrispondente all'equazione (2). Essendo 6 il prodotto de' numeri di moltiplicità, le radici non possono essere che 3 di un valore e 2 di un altro.

§ 51. *Determinanti emisimmetrici.* Essendo nulli (§ 41) gli elementi della diagonale, nello sviluppo dato al § 42, rimarranno soltanto quei termini, nei quali dalla serie delle lettere $a\,b\,c \dots h$ alla serie dei loro *indici* vi è una sostituzione (veggasi la nota), che abbraccia tutte le n lettere; questa sostituzione potrà essere composta di un certo numero di sostituzioni semplici; ora se una di queste abbraccia un numero dispari di lettere, qual sarebbe la $a_b b_c c_a$, vi sarà un altro termine $a_c b_a c_b$, nel quale le lettere superiori saranno mutate negli indici e viceversa, i due termini hanno segni eguali perchè le alternazioni dal termine diagonale $a_a b_b c_c \dots$ possono eseguirsi tanto sulle lettere quanto sugli indici, ed a motivo di $a_b = -b_a$, $b_c = -c_b$, $c_a = -a_c$ essi si distruggeranno; dunque rimangono soltanto i termini dipendenti da sostituzioni binomie, quadrinomie, ec. — Così il determinante emisimmetrico di 4.° grado si riduce ai termini $a_b b_a c_d d_c + a_c b_d c_a d_b + a_d b_c c_b d_a = b_a^2 d_c^2 + c_a^2 d_b^2 + d_a^2 c_b^2$, che nascono dalle sostituzioni $((ab)(cd))$, $((ac)(bd))$, $(ad)(bc))$ ed ai termini $-a_b b_c c_d d_a - a_b b_d c_a d_c - a_c b_d c_b d_a = a_b b_c c_d a_d + a_b d_b a_c c_d + a_c d_b b_c a_d$, che nascono dalle sostituzioni $((abcd))$, $((abdc))$, $((acbd))$, ai quali si riuniscono i loro eguali $-a_d b_a c_b d_c - a_c b_a c_d d_b - a_d b_c c_a d_b$, che nascono dalle sostituzioni $((adcb))$, $((acdb))$, $((adbc))$.

§ 52. Siccome un numero dispari non può separarsi in parti tutte pari, così risulta dal § precedente che: *Ogni determinante emisimmetrico di grado dispari è nullo.*

§ 53. Teorema. *Ogni determinante emisimmetrico di grado pari* $Q = | a_a b_b c_c d_d \dots |$ *è un quadrato perfetto.* Premettiamo che $D_{a_a} Q$ essendo un determinante emisimmetrico di grado dispari è (§ 52) nullo, e che $D_{a_b} Q = -D_{b_a} Q$, non essendo difficile riconoscere che i due determinanti che in Q moltiplicano a_b e b_a hanno gli stessi elementi (permutate soltanto le righe in colonne e viceversa) coi segni cangiati. — Dopo ciò prendiamo (§ 10 (2)) la solita formula di riduzione

$$Q = (a_b D_{a_b} + a_c D_{a_c} + a_d D_{a_d} + \dots) Q \tag{1}$$

fattone il quadrato $Q^2 = a_b^2 (D_{a_b} Q)^2 + 2 a_b a_c D_{a_b} Q D_{a_c} Q + \text{ec.}$, osserviamo che pel § 30 (avendosi $D_{a_b} Q = - D_{b_a} Q$) è

$$
\begin{aligned}
Q D^2_{a_a b_b} Q &= - D_{a_b} Q D_{b_a} Q = (D_{a_b} Q)^2 \\
Q D^2_{a_a c_b} Q &= - D_{a_b} Q D_{c_a} Q = D_{a_b} Q D_{a_c} Q \\
Q D^2_{a_a c_c} Q &= - D_{a_c} Q D_{c_a} Q = (D_{a_c} Q)^2 \text{, ec.}
\end{aligned}
$$

perciò possiamo dividere il secondo membro per Q ed avremo

$$
(2) \quad Q = a_b^2 D^2_{a_a b_b} Q + 2 a_b a_c D^2_{a_a c_b} Q + a_c^2 D^2_{a_a c_c} Q + 2 a_b a_d D^2_{a_a d_b} Q + \text{ec.}
$$

nella quale i coefficienti delle a_b^2, $2 a_b a_c$, ec. sono tali in grandezza ed in segno da potersi estrarre la radice del secondo membro ogniqualvolta $D^2_{a_a b_b} Q$, $D^2_{a_a c_c} Q$, ec. sieno quadrati perfetti. Ora queste derivate seconde (rispetto a due elementi della diagonale) sono determinanti emisimmetrici del grado $(n-2)^{esimo}$; in tal maniera la dimostrazione del teorema annunciato al principio di questo § è successivamente ridotta fino al caso di $n = 2$.

§ 54. Per procedere all' estrazione di radice di Q poniamoci sotto gli occhi i determinanti

$$
Q = \begin{vmatrix} 0 & b_a & c_a & d_a \\ a_b & 0 & c_b & d_b \\ a_c & b_c & 0 & d_c \\ a_d & b_d & c_d & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
D^2_{a_a b_b} Q = \begin{vmatrix} 0 & d_c \\ c_d & 0 \end{vmatrix}, \quad D^2_{a_a c_b} Q = - \begin{vmatrix} b_c & d_c \\ b_d & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
D^2_{a_a c_c} Q = \begin{vmatrix} 0 & d_b \\ b_d & 0 \end{vmatrix}, \quad D^2_{a_a d_b} Q = \begin{vmatrix} b_c & 0 \\ b_d & c_d \end{vmatrix}, \quad D^2_{a_a d_d} Q = \begin{vmatrix} 0 & c_b \\ b_c & 0 \end{vmatrix},
$$

essendo a_b il secondo elemento della prima colonna di Q prenderemo anche nei $D^2_{a_a b_b} Q$, ecc. gli elementi corrispondenti c_d, b_d, b_c, e così avremo pel determinante di 4.° grado

$$
(1) \qquad \sqrt{Q} = a_b c_d + a_c d_b + a_d b_c
$$

(si cangiò b_d in d_b onde ridurre tutti i termini col segno $+$). Questa frazione, e le altre che ora troveremo, furono dette *Pfaffiane* (perchè s' incontrano nel metodo del Pfaff per l' integrazione delle equazioni differenziali) e possiamo segnarle con $\mathrm{Pf}(abcd)$, intendendo che sulle 3 ultime lettere si eseguisca e si ripeta la sostituzione trinomia (Vegg. la Nota), sicchè si ottengano le tre disposizioni ***abcd***, ***acdb***, ***adbc***, nelle quali si ***abbassino ad indici*** le lettere in posto pari e si sommino i tre termini $a_b c_d$, $a_c d_b$, $a_d b_c$ che ne risultano. Con questa regola se Q è del 6.° grado si ha tosto

$$\sqrt{\mathrm{D}^2_{a_a b_b} Q} = \mathrm{Pf}(cdef) = c_d e_f + c_e f_d + c_f d_e ,$$
$$\sqrt{\mathrm{D}^2_{a_a c_c} Q} = \mathrm{Pf}(bdef) = b_d e_f + b_e f_d + b_f d_e ,$$
$$\sqrt{\mathrm{D}^2_{a_a d_d} Q} = \mathrm{Pf}(bcef) = b_c e_f + b_e f_c + b_f c_e ,$$
$$\sqrt{\mathrm{D}^2_{a_a e_e} Q} = \mathrm{Pf}(bcdf) = b_c d_f + b_d f_c + b_f c_d ,$$
$$\sqrt{\mathrm{D}^2_{a_a f_f} Q} = \mathrm{Pf}(bcde) = b_c d_e + b_d e_c + b_e c_d .$$

Sostituendo nella (2) del § 53 ed avendo riguardo ai segni quali risultano dalla (I) e poi dall' analogia e dalla simmetria (perlochè giova mutare $-\mathrm{Pf}(bdef)$ nella sua eguale $\mathrm{Pf}(defb)$, e così delle altre) si ottiene

$$\text{(II)} \quad \sqrt{Q} = a_b \mathrm{Pf}(cdef) + a_c \mathrm{Pf}(defb) + a_d \mathrm{Pf}(efbc) + a_e \mathrm{Pf}(fbcd) + a_f \mathrm{Pf}(bcde) = \mathrm{Pf}(abcdef) ;$$

per isviluppare i 3.5 termini di quest' ultima Pfaffiana bisogna da prima eseguire e ripetere la sostituzione quinquinomia nelle 5 ultime lettere *bcdef*, poscia per ciascuna disposizione eseguire la sostituzione trinomia sulle tre ultime lettere.

§ 55. *Determinanti conjugati.* Alle equazioni del § 20 diamo la forma

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + k_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + k_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

se $P = | a_1 b_2 c_3 |$ è il determinante formato coi coefficienti delle incognite; queste saranno date in funzioni delle k_1 col mezzo delle equazioni risolventi

$$(3) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + Px = 0 \\ \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + Py = 0 \\ \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \gamma_3 k_3 + Pz = 0 \end{aligned}$$

i cui coefficienti sono le derivate del determinante P

$$\alpha_1 = D_{a_1} P \, , \, \beta_1 = D_{b_1} P \, , \ldots , \, \alpha_3 = D_{a_3} P \, ,$$

infatti sostituendo nelle (III) i valori delle $x \, y \, z$ dati dalle (3) esse per le relazioni (1) dei §§ 10 e 18 diverranno identiche. Nel caso di $P = 1$ è anche $\Pi = | \, \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \, | = 1$ (come si riconosce formando colla solita formula (§ 31) il prodotto $P\Pi$) ed è perfetta la reciprocanza tra i due sistemi di equazioni (III) (3); sicchè gli elementi dei due determinanti possono dirsi tra loro *conjugati*; per speditezza di linguaggio diremo *conjugati* i due determinanti. *In due determinanti conjugati le derivate prime d' uno sono eguali agli elementi corrispondenti dell' altro*, cioè

$$D_{a_1} P = \alpha_1 \, , \, D_{\alpha_1} \Pi = a_1 \, .$$

§. 56. Pel teorema del § 30 essendo $P = \Pi = 1$ si ha tra i due determinanti conjugati anche

$$D_{a_1 b_2}^2 P = | \, \alpha_3 \beta_3 \, | \, , \text{ e } D_{\alpha_1 \beta_2}^2 \Pi = | \, a_1 b_2 \, | \, .$$

Simili relazioni hanno luogo per le derivate d' ordine superiore, cioè

$$D_{a_1 b_2 c_3}^3 P = | \, \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \, | \, , \text{ ecc.}$$

Quantunque le precedenti derivate si sieno prese rispetto agli elementi della diagonale, pure è palese che i teoremi valgono comunque gli elementi sieno scelti nelle varie righe e nelle varie colonne, giacchè è sempre in nostro arbitrio di trasportarli nella diagonale.

§ 57. Se il determinante P avesse un valore p differente dall' unità, il determinante formato colle sue derivate-prime $D_{a_1} P$, ecc., cioè coi coefficienti delle equazioni risolventi, non sarebbe più un suo vero *conjugato* (lo si può dire il determinante *associato*); pur sarebbe facile trovarne le proprietà, supponendo che tutti gli elementi di P fossero divisi per $\sqrt[n]{p}$, il che dividerebbe ogni derivata-prima per $p^{\frac{n-1}{n}}$, ec.; cioè basterà rendere omogenee le formule mediante l' introduzione della p, che si considera di $n.^{esimo}$ grado mentre gli

elementi $a_1 \ldots$ sono di grado 1.°, le derivate $\alpha_1 = \mathrm{D}_{a_1} P$ ec. sono di $(n-1)^{mo}$ grado, ec. $\Pi = | \alpha_1 \beta_2 \ldots |$ è di $(nn-n)^{esimo}$ grado. Per tal maniera si ha

$$| a_1 b_2 \ldots | = p \,, \; | \mathrm{D}_{a_1} P \,, \mathrm{D}_{b_2} P \ldots | = | \alpha_1 \beta_2 \ldots | = \Pi = p^{n-1}$$
$$\mathrm{D}_{a_1} \Pi = a_1 p^{n-2}$$
$$p \, \mathrm{D}_{a_1 b_2}^2 P = | \alpha_1 \beta_2 | = | \mathrm{D}_{a_1} P \,, \mathrm{D}_{b_2} P |$$

§ 57 *bis.* Quando il determinante $P = | a_1 b_2 c_3 |$ è $= 0$ le (III) del § 55 non ammettono più equazioni *risolventi*, perchè esse sono insufficienti a determinare le incognite: le (3) divengono

$$k_1 \mathrm{D}_{a_1} P + k_2 \mathrm{D}_{a_2} P + k_3 \mathrm{D}_{a_3} P = 0$$
$$k_1 \mathrm{D}_{b_1} P + k_2 \mathrm{D}_{b_2} P + k_3 \mathrm{D}_{b_3} P = 0$$
$$k_1 \mathrm{D}_{c_1} P + k_2 \mathrm{D}_{c_2} P + k_3 \mathrm{D}_{c_3} P = 0$$

e stabiliscono l'*unica* relazione che deve aver luogo tra le $k_1 k_2 k_3$ acciocchè le (III) non implichino contraddizione; perciò: *Se un determinante è* $= 0$, *le sue derivate-prime rispetto agli elementi di una riga sono proporzionali alle derivate rispetto agli elementi di un' altra qualsivoglia riga parallela alla prima.* Lo possiamo dimostrare più direttamente osservando che per le (1) dei §§ 10 e 18 si ha (essendo $P = 0$)

$$a_1 \mathrm{D}_{a_1} P + a_2 \mathrm{D}_{a_2} P + a_3 \mathrm{D}_{a_3} P = 0 \,, \; a_1 \mathrm{D}_{b_1} P + a_2 \mathrm{D}_{b_2} P + a_3 \mathrm{D}_{b_3} P = 0$$
$$b_1 \mathrm{D}_{a_1} P + b_2 \mathrm{D}_{a_2} P + b_3 \mathrm{D}_{a_3} P = 0 \,, \; b_1 \mathrm{D}_{b_1} P + b_2 \mathrm{D}_{b_2} P + b_3 \mathrm{D}_{b_3} P = 0$$
$$c_1 \mathrm{D}_{a_1} P + c_2 \mathrm{D}_{a_2} P + c_3 \mathrm{D}_{a_3} P = 0 \,, \; c_1 \mathrm{D}_{b_1} P + c_2 \mathrm{D}_{b_2} P + c_3 \mathrm{D}_{b_3} P = 0$$

le tre prime a motivo di $| a_1 b_2 c_3 | = 0$ sono in sostanza due sole relazioni tra le $\mathrm{D}_{a_1} P$, $\mathrm{D}_{a_2} P$, $\mathrm{D}_{a_3} P$, cioè ne stabiliscono i rapporti; e le tre ultime equazioni avendo gli stessi coefficienti delle tre prime mostrano che quei rapporti sono eguali a quelli delle $\mathrm{D}_{b_1} P$, $\mathrm{D}_{b_2} P$, $\mathrm{D}_{b_3} P$. Il teorema è anche dimostrato dalla (1) del § 30, il cui primo membro è nel presente caso $= 0$. — Se oltre il determinante P si annullassero anche tutte le sue derivate-prime, le due relazioni, che deggiono aver luogo tra le k, acciocchè le (III) non implichino contraddizione, sarebbero date col mezzo delle derivate-seconde di P, cioè

$$k_1 D^2_{a_1 c_1} P + k_2 D^2_{a_2 c_2} P = 0\ ,\ \ldots k_1 D^2_{a_3 b_1} P + k_2 D^2_{a_3 b_2} P = 0\ ,\ \text{ec.}$$
$$k_1 D^2_{a_1 c_1} P + k_3 D^2_{a_3 c_3} P = 0\ ,\ \text{ec. ec.}$$

§ 58. Se $|a_1 b_2 c_3|$, $|a'_1 b'_2 c'_3|$ sono due determinanti dello stesso grado ambedue eguali all' unità e sieno $|\alpha_1 \beta_2 \gamma_3|$, $|\alpha'_1 \beta'_2 \gamma'_3|$ i loro conjugati (§ 55) vedremo che: *Il determinante conjugato del prodotto di due determinanti è identico in tutti i suoi elementi al prodotto dei conjugati di questi determinanti.* Infatti pel § 31 è

$$|a_1 b_2 c_3| \cdot |a'_1 b'_2 c'_3| = |\Sigma aa', \Sigma bb', \Sigma cc'|\ ,$$

ed un elemento del suo conjugato è (§ 55)

$$|\Sigma bb', \Sigma cc'| = \begin{vmatrix} \Sigma bb', \Sigma bc' \\ \Sigma cb', \Sigma cc' \end{vmatrix}$$

che pel teorema del § 33 è

$$\Sigma^2 \left| \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b'_1 c'_1 \\ b'_2 c'_2 \\ b'_3 c'_3 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= |b_1 c_2| \cdot |b'_1 c'_2| + |b_1 c_3| \cdot |b'_1 c'_3| + |b_2 c_3| \cdot |b'_2 c'_3| = \alpha_3 \alpha'_3 + \alpha_2 \alpha'_2 + \alpha_1 \alpha'_1$$

cioè uguale all' elemento corrispondente del prodotto

$$|\alpha_1 \beta_2 \gamma_3| \cdot |\alpha'_1 \beta'_2 \gamma'_3|\ .$$

§ 59. Pei determinanti emisimmetrici le funzioni Pfaffiane, che ne danno (§ 54) il valore, servono pure a determinarne le derivate prime, che sono gli elementi del determinante *associato*, ossia i coefficienti delle equazioni risolventi (§ 55). Se Q è un determinante emisimmetrico di grado pari

$$Q = \left(\mathrm{Pf}(abcdef\ldots)\right)^2$$

si ha (§ 54)

$$D_{a_1 b_1} Q = \sqrt{Q\, D^2_{a_1 a_2 b_1 b_2} Q} = \mathrm{Pf}(cdef\ldots)\ \sqrt{Q}$$

similmente

$$\mathrm{D}_{ec}Q = -\mathrm{Pf}(bdef\ldots)\sqrt{Q},\quad \mathrm{D}_{ed}Q = \mathrm{Pf}(bcef\ldots)\sqrt{Q}$$

$$\mathrm{D}_{ee}Q = -\mathrm{Pf}(bcdf\ldots)\sqrt{Q},\quad \mathrm{D}_{ef}Q = \mathrm{Pf}(bcde\ldots)\sqrt{Q}\ \text{ec.}$$

dove si sono determinati i segni in modo da soddisfare alla (2) del § 10

$$a_b \mathrm{Pf}(cdef\ldots) + a_c \mathrm{Pf}(dbef\ldots) + a_d \mathrm{Pf}(bcef\ldots) +$$
$$+ a_e \mathrm{Pf}(cbdf\ldots) + a_f \mathrm{Pf}(bcde\ldots) + \ldots = \mathrm{Pf}(abcdef\ldots).$$

Si ha pure $\quad \mathrm{D}_{bc}Q = (\mathrm{Pf}(adef\ldots)\sqrt{Q}$, ec. ec.

§ 60. *Retroderivazione delle equazioni differenziali prime* (cioè del primo ordine) *del primo grado* (cioè coi differenziali al solo primo grado). Se l' equazione

(1) $$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z\ldots = 0$$

(la caratteristica d indica i differenziali, ossia le derivate rispetto ad una t di cui tutte le variabili si suppongono funzioni affatto indeterminate) tra un numero pari di variabili non soddisfaccia ai criterii di retroderivabilità (§ 89), per trovarne il sistema primitivo il Pfaff procede nel seguente modo. Alle y, z... si sostituiscano delle funzioni della x e delle nuove variabili u, v:..., le quali si determineranno (come or ora vedremo) in guisa che il primo membro della (1) che è identicamente eguale a

(2) $$X_1\mathrm{d}x + U_1\mathrm{d}u + V_1\mathrm{d}v + \ldots$$

si riduca alla forma

(3) $$e^{\xi}(U\mathrm{d}u + V\mathrm{d}v + \ldots)$$

poi tolto il fattore e^{ξ} rimanga un' equazione tra $(n-1)$ variabili, una di queste u si porrà eguale ad una costante, e sull' equazione

$$V\mathrm{d}v + W\mathrm{d}w\ldots = 0$$

si opererà precisamente come si fece per la (1), e si procederà fino a giungere ad un' equazione fra due sole variabili, che si retroderiverà. In tal modo la (1) rimane soddisfatta dal sistema di $\frac{n}{2}$ equazioni

(4) $$u = C,\ v_1 = C_1,\ w_2 = C_2,\ \text{ec.}$$

Da cui si ha poi altro sistema espresso dalla $\Phi(u, v_2, w_3, \ldots) = 0$ e dalle sue derivate. — I coefficienti della (1) sono fonzioni quali si vogliano delle variabili; se fossero

$$
(5) \qquad \begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \ldots + h_1, \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \ldots + h_2, \\ Z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \ldots + h_3, \text{ ecc.} \end{aligned}
$$

le $a_1 b_1, \ldots a_2 \ldots$ ec. ne sarebbero le derivate prime; supporremo che in ogni caso sia

$$
a_1 = \mathrm{D}_x X \; ; \; b_1 = \mathrm{D}_y X \; , \ldots , a_2 = \mathrm{D}_x Y \; , \text{ ec.}
$$

sicchè le $a_1 b_1 \ldots$ saranno funzioni delle variabili. — L'eguaglianza tra la (1) e la (2) dà

$$
\begin{aligned} X_1 &= X + Y \mathrm{D}_x y + Z \mathrm{D}_x z + \ldots, \\ U_1 &= \quad Y \mathrm{D}_u y + Z \mathrm{D}_u z + \ldots, \text{ ec.} \end{aligned}
$$

ove $X_1 U_1 \ldots$ sono funzioni della x e delle $u, v, \ldots$ mentre $X, Y \ldots$ sono funzioni della x e delle $y \, z \ldots$, le quali ultime sono funzioni ignote delle $x, u; v \ldots$ Avremo perciò

$$
\begin{aligned} \mathrm{D}_x U_1 - \mathrm{D}_u X_1 = & - \mathrm{D}_{u(yz\ldots)} X + \\ & + (\mathrm{D}_{x(yz\ldots)} Y \mathrm{D}_u y - \mathrm{D}_{u(yz\ldots)} Y \mathrm{D}_x y) + \\ & + (\mathrm{D}_{x(yz\ldots)} Z \mathrm{D}_u z - \mathrm{D}_{u(yz\ldots)} Z \mathrm{D}_x z) + \text{ ecc.} \end{aligned}
$$

dove con $\mathrm{D}_{x(yz\ldots)}$ indico la derivata presa rispetto alla x nella supposizione che le $y \, z \ldots$ sieno funzioni di essa x, sicchè

$$
\begin{aligned} \mathrm{D}_{u(yz\ldots)} X &= \mathrm{D}_y X \mathrm{D}_u y + \mathrm{D}_z x \mathrm{D}_u z \ldots = b_1 \mathrm{D}_u y + c_1 \mathrm{D}_u z + \ldots \\ \mathrm{D}_{x(yz\ldots)} Y &= a_2 + b_2 \mathrm{D}_x y + c_2 \mathrm{D}_x z + \ldots, \\ \mathrm{D}_{x(yz\ldots)} Y &= \qquad b_2 \mathrm{D}_u y + c_2 \mathrm{D}_u z + \ldots, \text{ ecc;} \end{aligned}
$$

fatto lo sviluppo del calcolo si trova

$$
\begin{aligned} \mathrm{D}_x U_1 - \mathrm{D}_u X_1 = & \left[a_2 - b_1 + (c_2 - b_3) \mathrm{D}_x z + \ldots \right] \mathrm{D}_u y + \\ (6) \qquad & + \left[a_3 - c_1 + (b_3 - c_2) \mathrm{D}_x y + \ldots \right] \mathrm{D}_u z + \text{ ec.} \end{aligned}
$$

— Perchè la (2) si riduca alla (3), nella quale ξ è funzione della sola x, e le $U\,V\ldots$ non contengono la x, bisognerà che sia $X_1 = 0$, e

$$\mathrm{D}_x U_1 = \xi' U_1 = \xi' \,(Y\,\mathrm{D}_a y + Z\,\mathrm{D}_a z + \ldots .)$$

sostituendo nella (6) vedremo che per determinare le incognite $\xi', u, v, \ldots$ abbiamo posto

$$a_2 - b_1 = a_b,\ c_2 - b_3 = c_b,\ b_1 - c_2 = b_c,\ \text{ecc.}$$

le equazioni

$$(7)\qquad \begin{aligned} \xi' X &= \quad\ \ b_a \mathrm{D}_x y + c_a \mathrm{D}_x z + \ldots . \\ \xi' Y &= a_b \qquad\qquad\ + c_b \mathrm{D}_x z + \ldots \\ \xi' Z &= a_c + b_c \mathrm{D}_x y \qquad\quad + \ldots . \\ &\qquad\quad \text{ec.}\qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

la prima delle quali fu ottenuta sostituendo tutte le successive nella

$$0 = X_1 = X + Y\,\mathrm{D}_x y + Z\,\mathrm{D}_x z + \ldots .$$

osservando che $a_b = -b_a$, $b_c = -c_b$, ec. Queste medesime (7) rendono anche $\mathrm{D}_x V_1 = \xi' V_1$, $\mathrm{D}_x W_1 = \xi' W_1$, ec., come è facile prevedere per la loro simmetria, e come si verifica sviluppando i valori di $\mathrm{D}_x V_1$ ec. come si fece per $\mathrm{D}_x U_1$. Perciò col mezzo delle (7) si ottiene la trasformazione della (1) nella (3). I coefficienti delle (7) sono gli elementi di un determinante emisimmetrico di grado pari, perciò si trovano facilmente (§ 49) le equazioni risolventi, i cui primi termini sono $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\xi}\mathrm{D}_x y$, $\frac{1}{\xi}\mathrm{D}_x z$, ec., quindi esse si derivano trattandole come equazioni a due sole variabili, e le costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione sono le $u, v, w\ldots$

§ 61. Sia proposta per esempio la

$$(1)\qquad (a_1 x + h_1)\,\mathrm{d}x + (b_2 y + h_2)\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z = 0$$

(dove le $a_1\,a_2\,h_1\,h_2$ sono costanti) si trovano le

$$(7)\qquad \begin{aligned} \xi'(a_1 x + h_1) &= \mathrm{D}_x z \\ \xi'(b_2 x + h_2) &= \mathrm{D}_x z \\ -\xi' y &= -\mathrm{D}_x y \\ -\xi' x &= -1 \end{aligned}$$

queste non hanno bisogno d'essere risolte e danno $\xi' = \frac{1}{x}$, e le retroderivate

$$\begin{aligned} y &= u\,x \\ z &= b_2 y + h_2 \lg x + v \\ z &= a_1 x + h_1 \lg x + w \end{aligned}$$

(dove le u, v, w tengon luogo di costanti arbitrarie); sostituendo nella (1) si ha

$$(3) \qquad x\,(h_2\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}w) = 0$$

Questa non soddisfà al criterio di retroderivabilità, porremo adunque

$$(4) \qquad u = C\,,\; w + uv = C_1$$

cioè

$$y = C x$$

$$z - a_1 x - h_1 \lg x + \frac{y}{x} z - \frac{b_2}{x} y^2 - \frac{h_2}{x} y \lg x = C_1 .$$

Posto

$$z - a_1 x - h_1 \lg x + \frac{y}{x} (z - b_2 y - h_2 \lg x) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

si trova sostituendo nella (1) che la funzione arbitraria dev'essere sottoposta alla condizione

$$\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = z - b_2 y + h_2 - h_2 \lg x ;$$

§ 62. *Trasformazione delle coordinate ortogonali.* Quando alle coordinate ortogonali x, y, z altre se ne sostituiscono pur esse ortogonali legate colle prime dalle equazioni

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ w &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

le due espressioni del quadrato della distanza di un punto dall'origine delle coordinate danno

$$(\mathrm{II}) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

perciò sostituendo si hanno le 6 relazioni

$$(1) \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \text{ , ec.}$$
$$(2) \qquad a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3=0 \text{ , ec.}$$

le quali mostrano che

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{aligned} x&=a_1 u+a_2 v+a_3 w \\ y&=b_1 u+b_2 v+b_3 w \\ z&=c_1 u+c_2 v+c_3 w \end{aligned}$$

Dunque nel presente caso i due determinanti

$$P=|a_1 b_2 c_3| \; , \; \Pi=|\alpha_1 \beta_2 \gamma_3|$$

sono perfettamente uguali, e perciò (§ 57) il loro valore è $=\pm 1$; possiamo supporli $=+1$, giacchè mutando i segni degli elementi cangiano anche quelli dei determinanti. Questi due determinanti conjugati danno quindi (§ 55) le 9 relazioni

$$(3) \qquad a_1=\mathrm{D}_{a_1} P=|b_2 c_3| \; , \; b_1=\mathrm{D}_{b_1} P=-|a_2 c_3| \text{ , ec.}$$

Sostituendo le (III) nelle (I) si ottengono altre 6 relazioni

$$(1') \qquad a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \text{ , ec.}$$
$$(2') \qquad a_1 a_2+b_1 b_2+c_1 c_2=0 \text{ , ec.}$$

§ 63. Col mezzo della trasformazione delle coordinate ortogonali possiamo dimostrare il teorema accennato al principio del § 28. Se lo spigolo OA del tetraedro sia sull' asse delle u, e lo spigolo OB sul piano delle uv, cioè sia $v_1=0$, $w_1=0$, $w_2=0$ sarà evidentemente $\frac{1}{2} u_1 v_2$ la base, e $\frac{1}{6} u_1 v_2 w_3$ il valore del tetraedro $OABC$, e perciò

$$6 . OABC=\begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}=|u_1 v_2 w_3|$$

che per le (I) del § precedente e pel § 31 è

$$|u_1 v_2 w_3|=|x_1 y_2 z_3| . |a_1 b_2 c_3|=|x_1 y_2 z_3| .$$

§ 64. Una funzione omogenea di 2.° grado fra tre variabili (e gli stessi ragionamenti si estendono ad ogni altro numero di variabili)

$$\Phi_{(u,\, v,\, w)^2} = a_a u^2 + 2 b_a uv + b_b v^2 + 2 c_a uw + 2 c_b vw + c_c w^2$$

può considerarsi come la somma di tutti gli elementi del determinante simmetrico

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_a & b_a & c_a \\ a_b & b_b & c_b \\ a_c & b_c & c_c \end{vmatrix}$$

dopo aver moltiplicati gli elementi della prima colonna per u, quelli della seconda per v, quelli della terza per w, e poi ancora quelli della riga 1.ª, 2.ª, 3.ª per u, v, w; egli è per questo che seguiamo la funzione con

$$(u,\, v,\, w)^2 .$$

In tal funzione facciamo le sostituzioni del § 62

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ w &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

otterremo

$$\begin{aligned} &\{a_a (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + a_b (a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \\ &\quad + a_c (a_3 x + b_3 y + c_3 z)\} (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \\ &+ \{b_a (a_1 x + \ldots) + b_b (a_2 x + \ldots) + b_c (a_3 x + \ldots)\} (a_2 x + \ldots) + \\ &+ \{c_a (a_1 x + \ldots) + c_b (a_2 x + \ldots) + c_c (a_3 x + \ldots)\} (a_3 x + \ldots) = \\ &= (A_1 x + B_1 y + C_1 z) (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \\ &\quad + (A_2 x + \ldots) (a_2 x + \ldots) + (A_3 x + \ldots) (a_3 x + \ldots) = \\ &= A_a x^2 + 2 B_a xy + B_b y^2 + 2 C_a xy + 2 C_b xz + C_c z^2 = \varphi_{(x,\, y,\, z)^2} . \end{aligned}$$

ed è facile riconoscere (§ 31) che i coefficienti A_1 A_2 ec.. A_a A_b ec. sono gli elementi dei determinanti Ψ φ essendo

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\psi = \Phi P = \begin{vmatrix} a_a a_1 + a_b a_2 + \dots & a_a b_1 + a_b b_2 + \dots \\ b_a a_1 + b_b a_2 + \dots & b_a b_1 + b_b b_2 + \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \dots \\ A_2 & B_2 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\varphi = \psi P = \begin{vmatrix} A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots & A_1 b_1 + A_2 b_2 + \dots \\ B_1 a_1 + B_2 a_2 \dots & B_1 b_1 + B_2 b_2 + \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_a & B_a & \dots \\ A_b & B_b & \dots \end{vmatrix}$$

l' ultimo dei quali è simmetrico, cioè

$$A_b = B_a \;,\; A_c = C_a \;,\; B_c = C_b \,.$$

Se si voglia che tutti questi elementi fuori della diagonale sieno nulli, e che perciò (scrivendo $A\,B\,C$ in luogo di $A_a\,B_b\,C_c$) sia

$$\varphi = ABC \quad ; \quad \varphi_{(x,y,z)^2} = Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

noi avremo per determinare le 9 quantità $a_1 \dots c_3$ le 6 equazioni (1) (2) del § 62 e le tre

$$(4) \quad \begin{aligned} A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 &= B_1 a_1 + B_2 a_2 + B_3 a_3 = 0 \\ A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 &= C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 = 0 \\ B_1 c_1 + \dots\dots &= C_1 b_1 + \dots\dots = 0 \end{aligned}$$

Paragonando le

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= A \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= B_a = 0 \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 &= C_a = 0 \end{aligned}$$

colle (III) del § 62 ci si rende palese che in forza delle relazioni (1) (2) si hanno le equazioni analoghe alle (I)

$$A_1 = a_1 A + b_1 B_a + c_1 C_a = a_1 A \;,\; A_2 = a_2 A \;,\; A_3 = a_3 A$$

Sostituendo nelle ...

$$(5)\qquad \begin{aligned} a_a a_1 + a_b a_2 + a_c a_3 &= A_1 = a_1 A \\ b_a a_1 + b_b a_2 + b_c a_3 &= A_2 = a_2 A \\ c_a a_1 + c_b a_2 + c_c a_3 &= A_3 = a_3 A \end{aligned}$$

ed aggiungendo la prima delle (1)

$$(1)\qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

abbiamo le quattro equazioni per determinare $a_1 a_2 a_3 A$. Equazioni precisamente identiche serviranno a trovare anche le $b_1 b_2 b_3 B$, ed anche le $c_1 c_2 c_3 C$. Dalla (5) si deduce (§ 20)

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_a - A, & b_a, & c_a \\ b_a, & b_b - A, & c_b \\ c_a, & c_b, & c_c - A \end{vmatrix} = 0$$

la qual equazione darà (§ 44) ad A tre valori reali, che saranno quelli di A, B, C: le (5) daranno i rapporti delle $a_1 a_2 a_3$; sicchè dalla (4) se ne dedurranno i valori. In simil maniera si troveranno le b e le c, i cui segni deggiono soddisfare alle (3) del § 62.

§ 65. *Determinante formato colle derivate prime di alquante funzioni di altrettante variabili.* Se le $u, v, \ldots$ sono funzioni di altrettante variabili $x, y, \ldots$ date col mezzo delle equazioni lineari

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y \ldots\ldots + h_1 \\ v &= a_2 x + b_2 y \ldots\ldots + h_2 \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

e se sia nullo il determinante $| a_1 b_2 \ldots |$, le $u, v \ldots$ saranno tra loro dipendenti (§ 15) col mezzo di una equazione

$$(2)\qquad \Phi(u, v, \ldots) = 0 .$$

La predetta condizione $| a_1 b_2 \ldots | = 0$ *necessaria* e *sufficiente* perchè esista una dipendenza tra le funzioni $u, v, \ldots$ può evidentemente scriversi

$$(3)\qquad | D_x u, D_y v, \ldots | = 0 .$$

Che se le $u, v \ldots$ sieno funzioni quali si vogliano delle $x, y, \ldots$, e sieno

esse tra loro dipendenti col mezzo di una qualunque equazione (2), per ciascheduna delle variabili $x, y \ldots$ si avrà un' equazione analoga alla

$$(4) \qquad D_{x(u v \ldots)} \Phi = D_u \Phi D_x u + D_v \Phi D_x v + \ldots = 0$$

(dove $D_{x(u v \ldots)}$ indica la derivata presa rispetto alla x considerando le $u, v, \ldots$ come funzioni date della x, e delle $y \ldots$ indipendenti dalla x; invece le D_x, D_u ec. indicano le derivate prese rispetto alla quantità x od u ec., che entra esplicitamente nella funzione). Perciò gli elementi $D_x u$, $D_y u \ldots$ di una colonna del determinante $| D_x u, D_y v, \ldots |$ dipendono con una medesima relazione omogenea (4) dagli elementi della loro riga; quindi (§ 14) la predetta (3) è in ogni caso condizione *necessaria* per la dipendenza delle n funzioni $u, v, \ldots$ A dimostrare che essa è anche *sufficiente* premetteremo il seguente teorema.

§ 66. Da $(n-1)$ funzioni $v, w \ldots$ scelte ad arbitrio tra le n funzioni $u, v, \ldots$ si deducano i valori di altrettante variabili $y, z, \ldots$, e questi si sostituiscano nella funzione rimanente, sicchè sia

$$u = U(x, v, w, \ldots)$$

dove la U è funzione esplicita delle quantità poste tra parentesi. Ne viene

$$\begin{aligned} D_x u &= D_x U + D_v U D_x v + D_w U D_x w \ldots \\ D_y u &= \qquad D_v U D_y v + D_w U D_y w \ldots \\ D_z u &= \qquad D_v U D_z v + D_w U D_z w \ldots \end{aligned}$$

Quindi sottraendo dagli elementi della prima colonna di $| D_x u, D_y v \ldots |$ gli altri elementi moltiplicati sempre per le quantità $D_v U$, $D_w U$ ecc. avremo

$$(I) \qquad | D_x u, D_y v, D_z w \ldots | = D_x U \, | D_y v, D_z w, \ldots |$$

cioè: *Il determinante delle derivate prime di n funzioni si riduce a quello relativo ad una funzione e ad una variabile di meno.*

§ 67. Ora se il primo membro della (I) sia nullo dovrà essere o $D_x U = 0$, il che porterebbe di conseguenza che tra le n funzioni sussistesse un' equazione della forma

$$\Phi = u - U(v, w \ldots) = 0,$$

oppure $| D_y v , D_z w \ldots | = 0$. In questo secondo caso da $(n-2)$ funzioni (scelte ad arbitrio tra le $v, w, \ldots$) dedurremo i valori di altrettante variabili, che sostituiti nella funzione rimanente la ridurranno della forma

$$v = V(y, w, \ldots)$$

e dimostreremo precisamente nello stesso modo che dev' essere o $D_y V = 0$, cioè

$$v = V(w \ldots), \text{ oppure } | D_z w, \ldots | .$$

Basterà adunque fare in guisa, che l' ultima funzione contenga l' ultima variabile per esser certi che deve sussistere una delle

$$u = U(v, w \ldots), \quad v = V(w, \ldots), \text{ ec.}$$

Dunque: *La condizione* (3) *del* § 65 *è necessaria e sufficiente per la dipendenza tra le funzioni* $u, v \ldots$

§ 68. Si possono dimostrare nello stesso modo altre relazioni analoghe alla (1) (§ 66). Dalle n funzioni se ne scelgano arbitrariamente $(n-m)$ (suppongo per fissare le idee che sia $m=2$), dalle quali si deducano i valori di altrettante variabili, che sostituite nelle rimanenti m funzioni daranno a queste le forme

$$u = U(x, y, w \ldots), \quad v = V(x, y\, w \ldots)$$

dalle quali si deduce (§ 66)

$$(11) \qquad | D_x u , D_y v , D_z w \ldots | = | D_x U , D_y V | \cdot | D_z w , \ldots | .$$

Queste relazioni possono considerarsi come casi particolari della seguente.

§ 69. *Determinante delle derivate-prime di n equazioni identiche.* Sieno

$$\varphi = 0 \; ; \; \chi = 0 \; , \; \psi = 0$$

n equazioni tra le $x\, y \ldots u\, v \ldots$, che si riducano identiche quando alle $u\, v \ldots$ si sostituiscono le loro espressioni in funzioni delle $x, y \ldots$ Per ciascuna equazione e per ciascuna variabile avremo un' equazione analoga alla

$$D_{x(uv\ldots)} \varphi = 0 \; .$$

che può scriversi così

$$D_u\varphi D_x u + D_v\varphi D_x v \ldots = -D_x\varphi$$

Queste n^2 equazioni ed il teorema (§ 31) sul prodotto di due determinanti danno

$$\text{(III)} \quad |D_x u, D_y v \ldots| \cdot |D_u\varphi, D_v\chi \ldots| = |-D_x\varphi, -D_y\chi, \ldots|$$

Se colle ipotesi del § 68 porremo

$$\varphi = u - U(x, y, w \ldots), \chi = v - V(x, y, w \ldots), \psi = w - W(x, y, w, \ldots) \text{ ec.}$$

nel determinante $|D_u\varphi, D_v\chi, D_w\psi \ldots|$ saranno nulle tutte le $D_u\psi, \ldots, D_v\psi \ldots$ eccettuate le $D_w\psi = 1, \ldots$, così pure

$$D_u\varphi = 1, \; D_u\chi = 0, \; D_v\varphi = 0, \; D_v\chi = 1,$$

sicchè quel determinante si riduce all' unità: il determinante poi del secondo membro della (III) si decompone nei due del secondo membro della (II) perchè sono nulle tutte le $D_z\varphi, \ldots D_z\chi, \ldots$

§.70. Se dalla funzione u si deduca il valore della variabile x in funzione delle $u, y, z \ldots$ per poi sostituirlo nella v; e dalle due u, v si deducano i valori delle x, y per sostituirli nella w, e così in seguito; rispetto alle equazioni identiche

$$\varphi = u - u(x, y, z \ldots) = 0, \; \chi = v - v_1(u, y, z \ldots) = 0$$
$$\psi = w - w_2(u, v, z \ldots) = 0, \text{ ec.}$$

(dove le $v_1 w_2 \ldots$ sono ciò che colle predette sostituzioni divengono le $v, w \ldots$) la (III) si cangerà nella

$$\text{(IV)} \quad |D_x u, D_y v \ldots| = D_x u \, D_y v_1 \, D_z w_2 \ldots$$

Infatti $\quad D_u\varphi = 1, \; D_v\varphi = 0, \; D_v\chi = 1, \; D_w\varphi = 0,$

$$D_w\chi = 0, \; D_w\psi = 1 \text{ ecc. sicchè } |D_u\varphi, D_v\chi \ldots| = 1;$$

ed anche il determinante del 2.° membro della (III) si riduce al solo termine diagonale, perchè

$$D_z\chi = D_z\psi = \ldots = 0, \; D_y\psi = \ldots = 0, \text{ ec.}$$

§ 71. Tra le n funzioni $u\, v\, w \ldots$ scegliamone ad arbitrio un numero m, che per fissare le idee suppongo sieno le due $u\, v$; facciamo altrettanto tra le variabili; poscia combineremo ciascuna delle rimanenti $(n-m)$ funzioni $w\, w \ldots$ con ciascuna delle rimanenti variabili $z\, z \ldots$, e così formeremo il determinante del grado $(n-m)^{esimo}$,

$$T = \begin{vmatrix} | D_x u, D_y v, D_z w |, | D_x u, D_y v, D_z w |, \ldots \\ | D_x u, D_y v, D_z w |, | D_x u, D_y v, D_z w |, \ldots \\ \ldots \ldots \end{vmatrix}$$

che ha per elementi dei determinanti di $(m+1)^{esimo}$ grado; applicando la (I) (§ 66) a ciascuno di tali determinanti si avrà

$$| D_x u, D_y v, D_z w | = D_z W | D_x u, D_y v |$$

purchè dalle $u\, v$ s'intendano dedotte le $x\, y$ e sostituite nella

$$w = W(u, v, z, z, \ldots)$$

perciò sarà

$$T = | D_z W, D_z W, \ldots | . | D_x u, D_y v |^{n-m}$$

Come la (II) (§ 68) si riferisce alle U, V, così possiamo collo stesso metodo dimostrare una formula analoga relativa a quanto si vogliano $W\, W \ldots$; il valore di $| D_z W, D_z W \ldots |$ che se ne ricava sostituito nella precedente darà

$$\text{(V)} \quad T = | D_x u, D_y v, D_z w \ldots | . | D_x u, D_y v |^{n-m-1}$$

§ 72. Molte conseguenze possono trarsi da questa (V) anche nel caso particolare, in cui le $u, v \ldots$ sieno funzioni lineari date dalle (1) del § 65; allora essa diventa

$$(5) \quad \begin{vmatrix} | a_1 b_2 c_3 |, | a_1 b_2 d_3 |, \ldots \\ | a_1 b_2 c_4 |, | a_1 b_2 d_4 |, \ldots \\ \ldots \ldots \end{vmatrix} = | a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots | . | a_1 b_2 |^{n-m-1}$$

(Il Brioschi la attribuisce al Sylvester (*Phil. Mag.* 1851)).
Se $n = m+2$ la (5) diventa la (1) del § 30. Se invece di prendere $m = 2$ si fosse preso $m = 1$ la (5) diventerebbe la formula del § 38.

§ 73. Supponendo che le $\varphi = 0$, $\chi = 0$, ... sieno le equazioni identiche

$$x(u, v, w \ldots) - x = 0 \;, y(u, v, w \ldots) - y = 0$$

dove intendo con $x(u, v, w \ldots)$ quella funzione delle funzioni $u\, v \ldots$ che è uguale alla variabile x, ecc. la (III) (§ 69) diventa

$$\text{(VI)} \qquad | \, D_x u, D_y v \ldots | \, . \, | \, D_u x, D_v y, \ldots | = 1 \, .$$

Daremo a questi due determinanti il nome di determinanti *conjugati*, che abbiamo già dato (§ 55) ad altri che ne sono casi particolari, così: *I determinanti conjugati formati colle derivate prime hanno il prodotto eguale all' unità.*

§ 74. Chiamiamo

$$P = | \, D_x u \,, D_y v \ldots | \,, \; \Pi = | \, D_u x \,, D_v y \,, \ldots |$$

i due determinanti conjugati, e segniamone gli elementi con

$$a_1 = D_x u \,, b_1 = D_y u \,, \ldots \; a_2 = D_x v \,, b_2 = D_y v \,, \ldots, \text{ ec.}$$
$$\alpha_1 = D_u x \,, \beta_1 = D_u y \,, \ldots \; \alpha_2 = D_v x \,, \beta_2 = D_v y \,, \ldots, \text{ ec.}$$

Gli sviluppi delle

$$D_{u(xyz\ldots)} u \,, D_{u(xyz\ldots)} v \,, D_{u(xyz\ldots)} w \,, \text{ ec.}$$

considerando le $u, v, w \ldots$ come funzioni delle $x\,y\,z \ldots$ e poi queste come funzioni delle $u\,v\,w \ldots$ danno

$$a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 \ldots = 1$$
$$a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1 \ldots = 0$$
$$a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1 \ldots = 0$$

dalle quali si deduce (Vegg. il § 21)

$$\text{(VII)} \qquad \alpha_1 = D_u x = D_{a_1} \lg P \,, \; \beta_1 = D_u y = D_{b_1} \lg P \,, \ldots$$

Similmente si dimostrano le analoghe

$$\alpha_2 = D_v x = D_{a_2} \lg P \,, \ldots, \text{ ec.}$$

E pel determinante conjugato si ha nella stessa maniera

$$\text{(VII')} \qquad a_1 = D_x u = D_{\alpha_1} \lg \Pi \,,\; b_1 = D_y u = D_{\beta_1} \lg \Pi \,, \ldots, \text{ ec.}$$

cioè: ***La derivata di un determinante rispetto ad un suo elemento è uguale al determinante stesso moltiplicato pel corrispondente elemento del determinante conjugato.***

§ 75. Prendendo gli elementi $a_1\, a_2 \ldots$ della prima colonna di P (e, secondo il solito, simil cosa direbbesi di ogni altra colonna) e derivandoli rispetto alle $u, v, \ldots,$ di cui le $x, y, \ldots$ sono funzioni, si ha

$$D_{v(xy\ldots)}\, a_2 = D_x a_2\, D_v x + D_y a_2\, D_v y + \ldots.$$

ed a motivo delle (VII)

$$\begin{aligned} D_{v(xy\ldots)}\, a_2 &= D_x a_2\, D_{a_2} \lg P + D_y a_2\, D_{b_2} \lg P + \ldots \\ &= D_{a_2} \lg P . D_x a_2 + D_{b_2} \lg P . D_x b_2 + \ldots \end{aligned}$$

giacchè $D_y a_2 = D_x b_2$, ecc. Sommando questa equazione colle sue analoghe

$$D_{u(xy\ldots)}\, a_1 = D_{a_1} \lg P\, D_x a_1 + D_{b_1} \lg P\, D_x b_1 + \ldots., \text{ ec.}$$

ed osservando che P è funzione esplicita delle $a_1 b_1 \ldots a_2 b_2 \ldots$, ec., che sono funzioni delle $xy\ldots$ si ha

$$\text{(VIII)} \qquad D_x \lg P = D_u a_1 + D_v a_2 + \ldots$$

Per la (VI) $(P\Pi = 1)$ si ha

$$D_x \lg P = - D_{x(uv\ldots)} \lg \Pi$$

che a motivo delle $D_x u = a_1$, $D_x v = a_2$, ... si sviluppa in

$$- D_{x(uv\ldots)} \lg \Pi = - a_1 D_u \lg \Pi - a_2 D_v \lg \Pi - \text{ec.}$$

sostituendo nella (VIII) ed osservando che

$$D_u a + a D_u \lg \Pi = \frac{1}{\Pi} D_u (\Pi a)$$

si ottiene la relazione

$$0 = D_u (a_1 \Pi) + D_v (a_2 \Pi) \ldots$$

La sua analoga rispetto al determinante conjugato è

(IX) $$0 = \mathrm{D}_x (P\alpha_1) + \mathrm{D}_y (P\beta_1) + \ldots$$

e mediante le (VII) le si può dare la forma

(X) $$0 = \mathrm{D}^2_{x a_1} P + \mathrm{D}^2_{y b_1} P + \ldots$$

scrivendo $\mathrm{D}^2_{x a}$ in luogo di $\mathrm{D}^{1, 1}_{x, a}$ ossia di $\mathrm{D}_x \mathrm{D}_a$.

§ 76. *Applicazione all' equazione differenziale-parziale*

(1) $$X \mathrm{D}_x u + Y \mathrm{D}_y u + \ldots = 0$$

dove le X, Y,... sono funzioni quali si vogliano di tutte le n variabili indipendenti $x, y, z\ldots$ Se si conoscono $(n-1)$ primitive della (1) tra loro distinte $v, w, \ldots$ si avranno le $(n-1)$ equazioni

$$X \mathrm{D}_x v + Y \mathrm{D}_y v + \ldots = 0$$
$$X \mathrm{D}_x w + Y \mathrm{D}_y w + \ldots = 0 \text{ , ec.}$$

e quindi pel § 17 sarà

$$P = | \mathrm{D}_x u , \mathrm{D}_y v , \mathrm{D}_z w \ldots | = (\mathrm{D}_x u + \tfrac{Y}{X} \mathrm{D}_y u + \ldots) \mid \mathrm{D}_y v , \mathrm{D}_z w \ldots |$$

che paragonata colla (§ 10)

$$\mathrm{P} = \mathrm{D}_{a_1} P \mathrm{D}_x u + \mathrm{D}_{b_1} P \mathrm{D}_y u + \ldots$$

dà

$$\mathrm{D}_{a_1} P = | \mathrm{D}_y v , \mathrm{D}_z w \ldots | \text{ che porremo} = M X ,$$

poscia sarà $\mathrm{D}_{b_1} P = M Y , \mathrm{D}_{c_1} P = M Z , \ldots ;$

perciò la precedente (X) darà

(2) $$\mathrm{D}_x (M A) + \mathrm{D}_y (M B) + \ldots = 0$$

§ 77. *Applicazioni ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie.* Si abbia il sistema di $(n-1)$ equazioni

(3) $$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \ldots .$$

che ha una stretta relazione colla equazione differenziale-parziale (1). Essendo

$$du = D_x u\, dx + D_y u\, dy + \ldots\,,\quad dv = D_x v\, dx + D_y v\, dy + \ldots\,, \text{ ec.}$$

le (3) si trasformeranno nelle

$$(4)\qquad \frac{du}{\varphi} = \frac{dv}{\chi} = \frac{d\dot{w}}{\psi} = \ldots. \qquad \text{dove}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varphi &= X D_x u + Y D_y u + \ldots = X a_1 + Y b_1 + \ldots \\ \chi &= X D_x v + Y D_y v + \ldots = X a_2 + Y b_2 + \ldots\,, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Supponiamo che in queste $\varphi\, \chi \ldots$ sieno tolte le $x\, y \ldots$ introducendo invece le loro funzioni $u\,, v \ldots$; si prendano le derivate, si ponga attenzione alla (VIII) ed al significato delle $a_1\, b_1$ ec. (§ 74) e si otterrà

$$\begin{aligned} &D_u \varphi + D_v \chi + D_w \psi + \ldots.. = \\ &= X D_u a_1 + Y D_u b_1 \ldots + X D_v a_2 + Y D_v b_2 + \ldots + \text{ec.} \\ &+ a_1 D_{u(xy\ldots)} X + b_1 D_{u(xy\ldots)} Y + \ldots + a_2 D_{v(xy\ldots)} X + \ldots + \text{ec.} \\ (6)\quad &= X D_x \lg P + Y D_y \lg P + \ldots + D_x X + D_y Y + \ldots \end{aligned}$$

D' altronde le (4) danno qualunque sia μ funzione delle $u\, v \ldots$

$$(7)\qquad \varphi D_u \mu + \chi D_v \mu + \ldots = X D_{x(uv\ldots)} \mu + Y D_{y(uv\ldots)} \mu + \ldots$$

A questa (7) si sommi la (6) moltiplicata per μ, e mutato $\lg P$ nel suo eguale (§ 73) $= \lg \Pi$ si avrà

$$\begin{aligned} D_u(\varphi\mu) + \text{ec.} &= D_{x(uv\ldots)}(\mu X) + D_{y(uv\ldots)}(\mu Y) + \ldots - \\ &- \mu X D_{x(uv\ldots)} \lg \Pi - \mu Y D_{y(uv\ldots)} \lg \Pi - \ldots \end{aligned}$$

poniamo $\mu = M\Pi$, poi riduciamo M a funzione delle $x\, y \ldots.$, e la precedente equazione diventerà

$$(8)\qquad \begin{aligned} &D_u(\varphi M \Pi) + D_v(\chi M \Pi) + D_w(\psi M \Pi) + \ldots = \\ &= \Pi\,(D_x(M X) + D_y(M Y) + \ldots.)\,. \end{aligned}$$

Se si conoscano le $(n-2)$ funzioni $w\, \dot{w} \ldots.$, che soddisfacciano alle $(n-1)$ equazioni differenziali (3), esse renderanno identicamente nulle le $\psi\, \dot{\psi} \ldots$ e se M soddisfaccia alla (2) del § 71 la precedente

$$(8) \qquad D_u(\varphi M \Pi) + D_v(\chi M \Pi) = 0$$

mostrerà che $M\Pi$ è il moltiplicatore che rende differenziale esatta la

$$\varphi \, du - \chi \, dv = 0 \, .$$

§ 78. *Trasformazione degli integrali multipli.* La formula IV del § 70 può servire a mutare le variabili di un integrale multiplo; basterà un esempio a spiegare il metodo. Vogliasi determinare la massa di un corpo, nel quale sia q la densità del punto che ha le coordinate ortogonali $x\,y\,z$, cioè vogliasi determinare l' integrale triplo $\int^3 q \, dx \, dy \, dz$; e la q sia data in funzione delle coordinate *centrali*, cioè dell' *azzimutto* u, dell' *elevazione angolare* v, e del *raggio vettore* r, ed anche i limiti dell' integrazione si riferiscano alle coordinate centrali. Supponiamo che l' integrazione si eseguisca prima rispetto alla r, poscia alla v e finalmente alla u; da una (z) delle $z\,v\,u$ si tolga il valore di r e lo si sostituisca nelle altre due, che perciò divengano $x_1 y_1$ funzioni delle $z\,v\,u$; poscia dalla y_1 si deduca il valore della v, che si sostituisca nella x_1, che divenga per tal modo x_2 funzione delle $z\,y_1\,u$ ossia delle $z\,y\,u$; si avrà

$$\int^3 q \, dx \, dy \, dz = \int dx_2 \int dy_1 \int q \, dz = \int D_u x_2 \, du \int D_v y_1 \, dv \int q D_r z \, dr =$$
$$= \int^3 D_r z \, D_v y_1 \, D_u x_2 \, dr \, dv \, du \, .$$

Ora, se nella (IV) mutiamo $x\,y\,z\,u\,v\,w$ in $r\,u\,v\,z\,y\,x$, abbiamo

$$(1) \qquad D_r z \, D_v y_1 \, D_u x_2 = | \, D_r z \, , D_v y \, , D_u x \, | \, ,$$

il cui secondo membro non cangerebbe (eccetto che nel segno) se in qualunque modo si mutasse l' ordine con cui si son prese le variabili. È poi facile trovare che, essendo $z = r \operatorname{sen} v$, $y = r \cos v \operatorname{sen} u$, $x = r \cos v \operatorname{sen} u$, il secondo membro della (1) è $= r^2 \cos v$; dunque finalmente sarà

$$(2) \qquad \int^3 q \, dx \, dy \, dz = \int^3 q \, r^2 \cos v \, dr \, du \, dv \, .$$

§ 79. *Determinante formato colle derivate seconde di una funzione intera omogenea.* Se φ è funzione omogenea del grado $m.^{esimo}$ delle n variabili $x\,y\,\ldots$ il determinante simmetrico

$$
(1) \qquad H = \begin{vmatrix} D_x^2\,\varphi, & D_{xy}^2\,\varphi, & D_{xz}^2\,\varphi \ldots \\ D_{xy}^2\,\varphi, & D_y^2\,\varphi, & D_{yz}^2\,\varphi \ldots \\ D_{xz}^2\,\varphi, & D_{yz}^2\,\varphi, & D_z^2\,\varphi \ldots \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \end{vmatrix}
$$

(essendo $D_{xy}^2\,\varphi = D_x D_y\,\varphi$, ec.) suol chiamarsi l' *Hessiano* della funzione φ. Noi scriveremo

$$H = |\, D_x D_x\,, D_y D_y\,, \ldots \,|\, \varphi\,.$$

Se in luogo delle n variabili s' introducano le $u\,v \ldots$ mediante le

$$
(2) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \ldots \\ y &= \beta_1 u + \beta_2 v + \ldots, \text{ ecc.} \end{aligned}
$$

i cui coefficienti costanti formino il determinante

$$\Pi = |\, \alpha_1\, \beta_2 \ldots \,|$$

(che onde le (2) sieno tra loro indipendenti non può esser nullo) la funzione Φ, che è la φ ridotta a funzione delle $u\,v \ldots$ avrà il determinante Hessiano

$$(3) \qquad K = |\, D_u D_u\,, D_v D_v \ldots \,|\, \Phi \quad \text{che sarà} = \Pi^2 H\,.$$

Infatti

$$
\begin{aligned} D_u \Phi &= \alpha_1 D_x \varphi + \beta_1 D_y \varphi + \ldots \\ D_v \Phi &= \alpha_2 D_x \varphi + \beta_2 D_y \varphi + \ldots, \text{ ec.} \end{aligned}
$$

poscia

$$
\begin{aligned} D_{x(uv\ldots)} D_u \Phi &= \alpha_1 D_x^2\, \varphi + \beta_1 D_{xy}^2 \varphi + \ldots \\ D_{y(uv\ldots)} D_u \Phi &= \alpha_1 D_{xy}^2 \varphi + \beta_1 D_y^2 \varphi + \ldots \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ D_{x(uv\ldots)} D_v \Phi &= \alpha_2 D_x^2 \varphi + \beta_2 D_{xy}^2 \varphi + \ldots \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}
$$

sicchè la solita regola pel prodotto di due determinanti

$$
\begin{aligned} \Pi H &= |\, D_{x(uv\ldots)} D_u\,, D_{y(uv\ldots)} D_v\,, \ldots \,|\, \Phi = \\ &= |\, D_{u(xy\ldots)} D_x\,, D_{v(xy\ldots)} D_y \ldots \,|\, \varphi \end{aligned}
$$

giacchè $\qquad D_{x(uv\ldots)} D_u \Phi = D_{u(xy\ldots)} D_x\, \varphi$, ec. ;

nello stesso modo le

$$\begin{aligned} D^2_a \quad &= \alpha_1 D_{u(xy\ldots)} D_x \varphi + \beta_1 D_{u(xy\ldots)} D_y \varphi + \text{ec.} \\ D^2_{uv} \Phi &= \alpha_1 D_{v(xy\ldots)} D_x \varphi + \beta_1 D_{v(xy\ldots)} D_y \varphi + \ldots \\ &= \alpha_2 D_{u(xy\ldots)} D_x \varphi + \beta_2 D_{u(xy\ldots)} D_y \varphi + \ldots \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

danno

$$K = \Pi \,.\, | \, D_{u(xy\ldots)} D_x \,,\, D_{v(xy\ldots)} D_y \,,\, \ldots \, | \, \varphi = \Pi^2 H \,.$$

Possiamo conchiudere che: *Eseguendo sulla funzione omogenea una sostituzione lineare* (2), *il cui determinante* Π *sia* $= \pm 1$, *il determinante delle derivate-seconde conserva lo stesso valore.*

§ 80. Essendo φ funzione omogenea del grado $m.^{esimo}$ si hanno le equazioni

$$x D^2_x \varphi + y D^2_{xy} \varphi + \ldots = (m-1) D_x \varphi \;,\; x D^2_{xy} \varphi + y D^2_y \varphi + \ldots = (m-1) D_y \varphi, \text{ec.}$$

nelle quali i moltiplicatori delle $x\, y \ldots$ sono gli elementi del determinante H, perciò indicandoli con $a_x = D^2_x \varphi$, $b_x = D^2_{xy} \varphi$, ec. le equazioni risolventi saranno (§ 55)

$$(4) \qquad \begin{aligned} D_{a_x} H D_x \varphi + D_{b_x} H D_y \varphi + \ldots &= \frac{x}{m-1} H \,, \\ D_{b_x} H D_x \varphi + D_{b_y} H D_y \varphi + \ldots &= \frac{y}{m-1} H \,, \text{ ec.} \end{aligned}$$

Ora se i valori delle costanti $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ contenute nelle (2) sieno tali che nella Φ non sia compresa la u, e nulladimeno non sia $\Pi = 0$ (cioè le (2) rimangano tra loro indipendenti, vale a dire si possano determinare le $u, v \ldots$ qualunque sieno le $x, y, \ldots$) il determinante K della Φ sarà nullo, perchè sono nulle tutte le derivate di $D_u \Phi = 0$, ed a motivo dell'equazione (3) sarà anche $H = 0$; in tal caso le (4) sono (§ 57bis) tutte tra loro identiche, ed esprimono la relazione che dee aver luogo tra le $D_x \varphi, D_y \varphi, \ldots$ acciocchè la φ sia riducibile alla Φ di $(n-1)$ variabili; siccome la $D_u \Phi = 0$ dà

$$(5) \qquad \alpha_1 D_x \varphi + \beta_1 D_y \varphi + \ldots = 0 \,,$$

così paragonando colle (4) vediamo che: *Se la funzione* φ *intera omogenea tra n variabili sia riducibile mediante una sostituzione lineare alla* Φ *di*

(n—1) *variabili, il determinante Hessiano H della φ sarà nullo; le derivate-prime di questo H rispetto agli elementi di una sua riga qualsivoglia saranno proporzionali ai coefficienti costanti α_1, β_1 ...., e le derivate-prime della φ saranno sottoposte alla relazione* (5). Viceversa, se il determinante simmetrico H si annulli, noi sappiamo pel § 57*bis* che le sue derivate-prime hanno eguali rapporti, sicchè possiamo porre

$$(6) \quad D_{a_a} H = \alpha^2 M, D_{b_a} H = \alpha\beta M, \ldots D_{b_a} H = \alpha\beta M, D_{b_b} H = \beta^2 M, \ldots, \text{ec.}$$

(essendo M il loro massimo comun divisore), e le relazioni (4) si riducono perciò all' unica

$$\alpha D_x \varphi + \beta D_y \varphi + \ldots = 0,$$

ma rimane da dimostrare che le α, β,... sieno quantità costanti: dopo di che ponendo $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$,... sarà $D_u \Phi = 0$, cioè Φ non comprenderà la u. — Nel caso che le derivate-prime della φ sieno sottoposte a due equazioni tra loro differenti

$$(5') \qquad \alpha_1 D_x \varphi + \beta_1 D_y \varphi + \ldots = 0, \; \alpha_2 D_x \varphi + \beta_2 D_y \varphi + \ldots = 0,$$

prendendo le costanti $\alpha_1 \beta_1 \ldots \alpha_2 \beta_2 \ldots$ come coefficienti delle (2) ne risulterà $D_u \Phi = 0$, $D_v \Phi = 0$, cioè la Φ sarà ridotta a sole (n—2) variabili; le precedenti paragonate colle (4) mostrano pel § 57*bis* che in tal caso si annulla non solo H, ma eziandio tutte le sue derivate-prime; viceversa è da credersi che se si annullino H e tutte le $D_{a_a} H$, $D_{b_a} H$,... la φ sia sempre riducibile linearmente ad (n—2) variabili.

§ 81. *Delle chiavi algebriche.* Il Cauchy chiamò *chiavi* alcuni coefficienti simbolici, il cui prodotto riceve un particolar valore convenzionale, che può cangiarsi secondo la differente disposizione delle chiavi, sicchè bisogna porre attenzione di non mutar tal ordine. Le chiavi $c^1 c^2 c^3 \ldots$ che qui abbiamo da considerare sono sottoposte a queste condizioni: 1.° *Il prodotto di due chiavi eguali è sempre nullo.* 2.° *Il prodotto di tutte le chiavi disposte nel loro ordine naturale* $c^1 c^2 c^3 \ldots$ *è* $= 1$. 3.° *Il prodotto di tutte le chiavi disposte in qualunque altro ordine è* $= \pm 1$, *secondo che è pari o dispari il numero delle alternazioni colle quali si passa da tale disposizione alla naturale.*

§ 82. Ammesse queste supposizioni non è difficile intendere che: Un de-

terminante è uguale al prodotto dei polinomii che si ottengono preponendo agli elementi della prima colonna la chiave c^1, a quelli della seconda la chiave c^2, ec. poscia riunendo insieme gli elementi di ciascuna riga, e moltiplicando le righe coll' avvertenza di conservare ai fattori l' ordine stesso che hanno nel determinante. Così per esempio

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1, & -5 \\ 4, & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0, & -3 \end{vmatrix} = (c^1.3 + c^3.1 - c^4.5)(c^1.4 - c^2.2 + c^3.2) \,. \\ .(c^1.1 + c^2.2 + c^4.3)(c^2.2 - c^4.3) \,.$$

Possiamo eseguire parte di questi prodotti (senza però mutare l' ordine dei fattori), nel che ommetteremo ogni termine che conterrebbe due volte una stessa chiave; così il prodotto dei due primi polinomii è

$$-c^1c^2.6 + c^1.c^3.6 + c^3c^1.4 - c^3c^2.2 - c^4c^1.20 + c^4c^2.10 - c^4c^3.10 = \\ = -c^1c^2.6 + c^1c^3.2 + c^2c^3.2 + c^1c^4.20 - c^2c^4.10 + c^3c^4.10 \,.$$

Abbiamo mutato il segno al termine $c^3c^1.4$, onde dare alle chiavi l' ordine naturale, poscia $-c^1c^3.4$ si unì con $+c^1c^3.6$, ecc. Similmente il prodotto dei due ultimi fattori è

$$c^1c^2.2 - c^1c^4.3 - c^2c^4.12 \,.$$

Questi due polinomii moltiplicati insieme (ommettendo tutti i termini che conterrebbero una chiave ripetuta) daranno

$$-c^1c^3c^2c^4.24 - c^2c^3c^1c^4.6 + c^3c^4c^1c^2.20 = \\ = c^1c^2c^3c^4.(24 - 6 + 20) = 38$$

§ 83. Col mezzo delle chiavi si rendono evidenti parecchi teoremi relativi ai determinanti; così posto

$$P = |\, a_1\, b_2 \ldots \,| = (c^1.a_1 + c^2.b_1 \ldots.)(c^1.a_2 + c^2.b_2 \ldots.) \ldots$$

il teorema della moltiplicazione (§ 8) è espresso da

$$rP = (c^1.ra_1 + c^2.rb_1 \ldots.)(c^1.a_2 + c^2.b_2 \ldots.) \ldots$$

ed anche da

$$\alpha P = (c^1.\alpha a_1 + c^2.b_1 \ldots)(c^1.\alpha a_2 + c^2.b_2 \ldots)\ldots$$

giacchè in tutti i termini, che non isvaniscono, la chiave c^1, e quindi anche il suo moltiplicatore α_1 entrerà una sol volta. — Il determinante P si sviluppa (§ 10) in

$$P = c^1.a_1 (c^2.b_2 + \ldots)(c^2.b_3 + \ldots) +$$
$$+ c^2.b_1 (c^1.a_2 + c^3.c_2 + \ldots)(c^1.a_3 + c^3.c_3 + \ldots) + \text{ec.}$$

dove dalla quantità che moltiplica c^1 si tolsero tutti gli elementi, che contenevano la stessa chiave c^1, giacchè $c^1 c^1 = 0$; ecc. È pur palese la spartizione (§ 12)

$$(c^1.(a_1 + a_1') + c^2(b_1 + b_1') + \ldots)(c^1.a_2 + c^2.b_2 + \ldots)\ldots +$$
$$= (c^1.a_1 + c^2.b_1 + \ldots)(c^1.a_2 + c^2.b_2 \ldots)\ldots +$$
$$+ (c^1.a_1' + c^2.b_1' + \ldots)(c^1.a_2 + c^2.b_2 \ldots)\ldots$$

Si annulla (§ 15) ogni determinante con due righe uguali perchè (§ 81)

$$(c^1.a_1 + c^2.b_1 \ldots)(c^1.a_1 + c^2.b_1 + \ldots) = 0$$

§ 84. Teorema. *Il differenziale di un determinante, di cui ogni riga è il differenziale della precedente, si ottiene sostituendo all'ultima riga il suo differenziale.* Cioè

$$\mathrm{d}\,|\,x\,,\,\mathrm{d}y\,,\,\mathrm{d}^2 z\,| = |\,x\,,\,\mathrm{d}y\,,\,\mathrm{d}^3 z\,|\,.$$

Infatti il differenziale del prodotto

$$(c^1.x + c^2.y + c^3.z)(c^1.\mathrm{d}x + c^2.\mathrm{d}y + c^3.\mathrm{d}z)(c^1.\mathrm{d}^2x + c^2.\mathrm{d}^2y + c^3.\mathrm{d}^2z)$$

è la somma dei prodotti, che si ottengono differenziando separatamente ciascun fattore, di qnesti prodotti si annullano tutti quelli che contengono due righe uguali e rimane il solo

$$(c^1.x + c^2.y + c^3.z)(c^1.\mathrm{d}x + c^2.\mathrm{d}y + c^3.\mathrm{d}z)(c^1.\mathrm{d}^3x + c^2.\mathrm{d}^3y + c^3.\mathrm{d}^3z)\,.$$

§ 85. *Determinanti simmetrici, le cui righe risultano dalla prima con una sostituzione semplice* (Veggasi la nota). Adoperiamo le chiavi a sviluppare

il determinante, che rassomiglia a quello del § 43, ma non è doppiamente simmetrico

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = P$$

si ha

$$\begin{aligned} & c^1.a + c^2.b + c^3.c + c^4.d)\,(c^1.b + c^2.c + c^3.d + c^4.a) = \\ & = c^1 c^2.(ac - b^2) + c^1 c^3.(ad - bc) + c^1 c^4.(a^2 - bd) + \\ & + c^2 c^3.(bd - c^2) + c^2 c^4.(ab - cd) + c^3 c^4.(ac - d^2) \end{aligned}$$

così pure

$$\begin{aligned} & (c^1.c + c^2.d + c^3.a + c.^4b)\,(c^1.d + c^2a + c^3.b + c^4.c) = \\ & = c^3 c^4.(ac - b^2) + c^2 c^4.(cd - ab) + c^2 c^3.(bd - a^2) + \\ & + c^1 c^4.(c^2 - bd) + c^1 c^3.(bc - ad) + c^1 c^2.(ac - d^2) \end{aligned}$$

finalmente moltiplicheremo, ed osservando che

$$c^1 c^2 c^3 c^4 = 1 \ , \ c^1 c^3 c^2 c^4 = -1 \ , \text{ ecc.}$$

sarà

$$\begin{aligned} P = & (ac - b^2)^2 - 2\,(ad - bc)\,(cd - ab) - (bd - a^2)^2 - \\ & - (bd - c^2)^2 + (ac - d^2)^2 \,. \end{aligned}$$

Invece il prodotto delle righe prima e terza è

$$\begin{aligned} & c^1 c^2.(ad - bc) + c^1 c^3.(a^2 - c^2) + c^1 c^4.(ab - cd) + \\ & + c^2 c^3.(ab - cd) + c^2 c^4.(b^2 - d^2) + c^3 c^4.(bc - ad) \end{aligned}$$

e quello delle righe seconda e quarta è

$$\begin{aligned} & c^3 c^4.(cd - ab) + c^2 c^4.(c^2 - a^2) + c^2 c^3.(bc - ad) \\ & + c^1 c^4.(bc - ad) + c^1 c^3.(b^2 - d^2) + c^1 c^2.(ab - cd) \,; \end{aligned}$$

moltiplicheremo di nuovo, e ricordando che l' alternazione delle due righe seconda e terza cangia il segno avremo

$$P = 4\,(ad - bc)\,(ab - cd) - (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - d^2)^2 .$$

§ 86. *Chiavi composte.* Le chiavi $C^1\,C^2 \ldots.$ composte linearmente colle $c^1\,c^2 \ldots.$

$$(1) \qquad \begin{aligned} C^1 &= c^1.a_1 + c^2.b_1 + c^3.c_1 + \ldots \\ C^2 &= c^1.a_2 + c^2.b^2 + c^3.c_2 + \ldots \end{aligned}$$

possono adoperarsi nello stesso modo delle chiavi semplici $c^1\,c^2 \ldots.$, purchè alle convenzioni 2.ª e 3.ª del § 81 si sostituisca questa che

$$C^1\,C^2\,C^3 \ldots. = -\,C^2\,C^1\,C^3 \ldots. = \text{ec.}$$

colla solita regola delle alternazioni. Perciò il determinante

$$|\,\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3 \ldots\,|$$

sarà anche dato da

$$(2) \qquad C^1\,C^2\,C^3.\,|\,\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3 \ldots\,| = (C^1.\alpha_1 + C^2.\alpha_2 + C^3.\alpha_3 \ldots) \\ (C^1.\beta_1 + C^2.\beta_2 + C^3.\beta_3 + \ldots)\,(C^1.\gamma_1 + C^2.\gamma_2 + C^3.\gamma_3 \ldots) \ldots$$

Ora le relazioni (1) mostrano pel § 82 che

$$C^1\,C^2\,C^3 \ldots = |\,a_1\,b_2\,c_3 \ldots\,| ;$$

sostituendo poi le (1) nel secondo membro della (2) si ottiene

$$\begin{aligned} |\,a_1\,b_2\,c_3 \ldots|.|\,\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3 \ldots\,| &= \{ c^1.\,(a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + \ldots) + \\ & c^2.\,(b_1\,\alpha_1 + b_2\,\alpha_2 \ldots) + c^3.\,(c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + \ldots) + \ldots \}. \\ & \{ c^1.\,(a_1\,\beta_1 + a_2\,\beta_2 + \ldots) + c^2.\,(b_1\,\beta_1 + b_2\,\beta_2 + \ldots \} \ldots \end{aligned}$$

dove il secondo membro esprime pur esso un determinante, sicchè si ha la formula già data al § 31 pel prodotto di due determinanti.

§ 87. In forza della convenzione che il prodotto di due chiavi eguali è nullo, si riconosce facilmente che

$$\begin{aligned}
&\left(C^1.\alpha_1+C^2.\alpha_2\right)\left(C^1.\beta_1+C^2.\beta_2\right)+\left(C^1.\alpha_1+C^3.\alpha_3\right)\left(C^1.\beta_1+C^3.\beta_3\right)+\\
(1)\qquad &+\left(C^2.\alpha_2+C^3.\alpha_3\right)\left(C^2.\beta_2+C^3.\beta_3\right)+\\
&=\left(C^1.\alpha_1+C^2.\alpha_2+C^3.\alpha_3\right)\left(C^1.\beta_1+C^2.\beta_2+C^3.\beta_3\right)
\end{aligned}$$

Se in questa equazione poniamo

$$C^1=c^1.a_1+c^2.b_1\ ,\ C^2=c^1.a_2+c^2.b_2\ ,\ C^3=c^1.a_3+c^2.b_3$$

avremo

$$\left(C^1.\alpha_2+C^2.\alpha_2\right)\left(C^1.\beta_1+C^2.\beta_2\right)=C^1\,C^2.\ |\ \alpha_1\,\beta_2\ |\ ,\ \text{e}\ C^1\,C^2=|\ a_1\,b_2|\ \text{ecc.}$$

perciò la (1) diventerà

$$\begin{aligned}
&|\ \alpha_1\,\beta_2\,|.|\,a_1\,b_2\ |+|\ \alpha_1\,\beta_3\,|.|\,a_1\,b_3\ |+|\ \alpha_2\,\beta_3\,|.|\,a_2\,b_3\ |=\\
&=\left(c^1.(a_1\,\alpha_1+a_2\,\alpha_2+a_3\,\alpha_3)+c^2.(b_1\,\alpha_1+b_2\,\alpha_2+b_3\,\alpha_3)\right).\\
&.\left(c^1.(a_1\,\beta_1+a_2\,\beta_2+a_3\,\beta_3)+c^2.(b_1\,\beta_1+b_2\,\beta_2+b_3\,\beta_3)\right)
\end{aligned}$$

Così è dimostrato anche il teorema del § 33.

§ 88. *Eliminazione di un'incognita da due equazioni di grado superiore.* Per eliminare la x dalle due equazioni

$$(1)\qquad a+bx+cx^2+dx^3=0\ ,\ a'+b'x+c'x^2=0$$

supponiamo che sia identicamente

$$\left(c^1+c^2.x\right)\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)+\left(c^3+c^4.x+c^5.x^2\right)\left(a'+b'x+c'x^2\right)=$$

$$=C^1+C^2.x+C^3.x^2+C^4.x^3+C^5.x^4$$

avendo nel primo membro introdotte tante chiavi semplici, quante occorreva perchè il loro numero eguagliasse quello delle chiavi composte del secondo membro. In forza delle (1) sono eguali a zero i moltiplicatori di ciascuna chiave semplice, perciò sarà

$$(2)\qquad C^1\,C^2\,C^3\,C^4\,C^5=0$$

e questa equazione non contenendo la x sarà la cercata relazione tra i coefficienti $a\,b\,c\,d\;a'\,b'\,c'$, ed infatti la più semplice espressione del prodotto dell' eliminazione è il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o \\ o & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & o & o \\ o & a' & b' & c' & o \\ o & o & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

le cui righe verticali sono

$$C^1 = c^1.a + c^3.a^1 \;,\; C^2 = c^1.b + c^2.a + c^3.b^1 + c^4.a^1 \;,$$
$$C^3 = c^1.c + c.^2b + c^3.c^1 + c^4.b^1 + c^5.a^1 \;, \ldots.\; C^5 = c^3.d + c^5.c^1$$

§ 89. *Uso dei determinanti simbolici.* Nell' Algebra, nella Geometria e nella Meccanica s' incontrano di frequente delle formule analoghe ai determinanti, l' esprimerle colla segnatura di questi giova a ricordarle e particolarmente ad evitare l' errore nei segni. — Così la condizione che

$$P_x\,\mathrm{d}x + P_y\,\mathrm{d}y = 0$$

sia una differenziale esatta, si esprimerà col determinante simbolico

$$|\, \mathrm{D}_x \,,\, P_y \,| = 0$$

intendendo con questa segnatura la formula

$$\mathrm{D}_x P_y - \mathrm{D}_y P_x = 0 \;,$$

nella quale il prodotto delle due quantità D_x, P_y è cangiato nell' espressione $\mathrm{D}_x P_y$, ecc. Potrà riuscire bastantemente chiara anche la

$$|\, \mathrm{D}_x , Q \,| = 0$$

considerata come la condizione che $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ sia differenziale esatta, intendendosi che le lettere $P\,Q$ corrispondano agli indici $x\,y$. La condizione che l' equazione

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

sia *retroderivabile* è espressa dal determinante simbolico

$$| P , D_y , R | = 0$$

il quale si sviluppa (§ 4) in

$$P D_y R - P D_z Q - Q D_x R + Q D_z P + R D_x Q - R D_y P = 0 . -$$

Se colle due funzioni $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ formiamo i determinanti di 2.° grado

$$X = | D_y \varphi , D_z \psi | , Y = | D_z \varphi , D_x \psi | , Z = | D_x \varphi , D_y \psi |$$

si ha $$D_x X + D_y Y + D_z Z = 0$$

quest' equazione potrebbe scriversi simbolicamente

$$| D_x , (D_y \varphi , D_z \psi) | = 0 .$$

§ 90. Le condizioni necessarie perchè la

$$P \mathrm{d} x + Q \mathrm{d} y + R \mathrm{d} z$$

sia differenziale esatto sono

$$| c^1 , D_y , R | = 0$$

dandosi ora alle chiavi $c^1 c^2 c^3$ il significato di quantità affatto arbitrarie, sicchè la precedente equazione esiga che si annullino separatamente i coefficienti di ciascuna chiave. Similmente le condizioni perchè la

$$N \mathrm{d} u + P \mathrm{d} x + Q \mathrm{d} y + R \mathrm{d} z = 0$$

sia retroderivabile sono simbolicamente espresse da

$$| c^1 , P , D_y , R | = 0 .$$

Siccome è (§ 14) identicamente

$$| N , P , D_y , R | = 0$$

(giacchè le due prime colonne sono eguali), così una delle quattro condizioni è conseguenza (§ 15) delle altre tre.

§ 91. *Funzioni simmetriche.* Se rispetto alle $x_1, x_2, \dots x_n$

le

$$s_1, s_2, \dots, p_1, p_2 \dots p_n$$

abbiano il significato stabilito al § 7, ogni altra funzione simmetrica, come per esempio

$$\Sigma^r x^a x^b x^c \dots$$

(dove s' intende che le r quantità x si sieno scelte tra le $x_1, x_2, \dots x_n$ in tutti i modi possibili, colla condizione peraltro che in un termine non sia mai compresa due volte la stessa x) potrà esprimersi tanto col mezzo delle s quanto col mezzo delle p. È cosa per sè evidentissima che tutti i termini dello sviluppo della predetta Σ^r saranno del grado $a+b+c+\dots$ considerando ciascuna s e ciascuna p del grado stesso del suo indice (tali essendo i gradi di tali funzioni rispetto alle x). È pure abbastanza evidente che la Σ^r espressa col mezzo delle s non conterrà alcun prodotto di $(r+1)$ o di un maggior numero di queste s. Si trova che può scriversi simbolicamente

$$\Sigma^r x^a x^b x^c \dots = | a_a b_b c_c \dots |$$

intendendo che dopo fatto lo sviluppo di questo determinante simmetrico ogni elemento a_a della diagonale si cangi in s_a, ogni prodotto di due elementi formati con due sole lettere, come $a_b b_a = a_b^2 = b_a^2$ si cangi in s_{a+b}, ogni prodotto di tre elementi formati colle tre lettere $a\,b\,c$, (come sarebbe $a_b b_c c_a$) si cangi in s_{a+b+c}, e così in seguito. Per esempio dalla (§ 42, 43)

$$| a_a b_b c_c | = a_a b_b c_c - a_a b_c^2 - b_b a_c^2 - c_c a_b^2 + 2 a_b b_c c_a$$

si deduce la

$$\Sigma^3 x^a x^b x^c = s_a s_b s_c - s_a s_{b+c} - s_b s_{a+c} - s_c s_{a+b} + 2 s_{a+b+c}$$

NOTA

Sui cangiamenti nelle disposizioni di alcune cose.

j. Se ad alcune lettere o cose si danno due disposizioni differenti, per esempio

$$\begin{matrix} a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i \\ e\ i\ g\ b\ a\ f\ h\ c\ d \end{matrix}$$

per passare dalla superiore all' inferiore bisogna sostituire alla lettera a la e ed alla e la a, questa la diremo una *sostituzione binomia*, perchè si riferisce a due sole lettere e la segneremo con

$$((a\,e));$$

inoltre bisogna sostituire alla b la i, alla i la d, ed alla d la b, questa la diremo una sostituzione trinomia perchè riguarda tre lettere e la segneremo con $((bid))$; inoltre dovremo sostituire alla c la g, alla g la h, ed alla h la c, e questa sarà un' altra sostituzione trinomia segnata con $((cgh))$. Prendendo a considerare le disposizioni in un altro ordine, per esempio da destra verso sinistra; ci si presenterebbero successivamente le sostituzioni

$$((idb))\ ,\ ((hcg))\ ,\ ((ea))\ ,$$

che sono identiche colle precedenti, giacchè dovendosi sempre intendere che si sostituisca alla prima lettera (compresa tra le doppie parentesi) la seconda, alla seconda la terza, ... ed all' ultima la prima; hanno un medesimo significato $((bid))$ e $((idb))$, $((cgh))$ e $((hgc))$, $((ae))$ e $((ea))$. Per passare dalla disposizione inferiore alla superiore occorreranno le sostituzioni inverse alle precedenti e che sono

$$((ea))\ ,\ ((ibd))\ ,\ ((gch))\ .$$

ij. È facile intendere che qualsiasi sostituzione si riduce a sostituzioni della natura delle precedenti, che chiameremo sostituzioni *semplici*, e che furono dette sostituzioni *circolari*. Servano d' altro esempio le due disposizioni

$$\begin{matrix} a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,l \\ f\,l\,e\,d\,a\,g\,c\,i\,h\,b \end{matrix}$$

passeremo dalla superiore all' inferiore colla sostituzione quinquinomia

$$((afgce))$$

e colle due binomie $((bl))$ $((hi))$, e viceversa per risalire dalla seconda alla prima servono le sostituzioni

$$((faecg))\ ((bl))\ ((hi))\ .$$

Riesce quindi palese che: *Ogni sostituzione può ridursi in una sola maniera ad alcune sostituzioni semplici, le quali si riferiscono a lettere tra loro differenti, e perciò possono eseguirsi o successivamente con un ordine qualunque o simultaneamente.* Così per esempio se nella disposizione

$$c\,b\,f\,a\,d\,e\,h\,g$$

eseguiamo tutta la sostituzione composta

$$((ahf)\ (bg)\ (de))$$

otteniamo la disposizione

$$c\,g\,a\,h\,e\,d\,f\,b$$

ed invece eseguendo successivamente quelle disposizioni semplici si hanno le

$$c\,b\,a\,h\,d\,e\,f\,g\ ,\ c\,g\,a\,h\,d\,e\,f\,b\ ,\ c\,g\,a\,h\,e\,d\,f\,b\ .$$

iij. Ogni sostituzione binomia è una *alternazione* tra due lettere, che vicendevolmente si cedono il posto. Una sostituzione trinomia può eseguirsi mediante due alternazioni, poichè per passare dalla disposizione $b\,i\,d$ alla $i\,d\,b$ si può alternare da prima le $b\,i$, il che dà la disposizione $i\,b\,d$, poscia alternando le $b\,d$ si ottiene $i\,d\,b$. Analogamente una sostituzione quadrinomia può eseguirsi mediante tre alternazioni, come si vede operando sulla disposizione $a\,b\,c\,d$ le alternazioni $((ab))$ $((ac))$ $((ad))$, il che dà successivamente

bacd, *bcad*, *bcda*, e l' ultima presenta in confronto della primitiva *abcd* la sostituzione ((*abcd*)). Così pure la sostituzione di cinque termini ((*abcde*)) equivale alle quattro alternazioni

((*ab*)) ((*ac*)) ((*ad*)) ((*ae*)) ; ecc.

iv. Nel paragone di due sostituzioni

abcdefghi
eigbafhcd

consideriamo tutti gli ambi di lettere, e notiamo quelli, pei quali da una disposizione all'altra le lettere assumono ordine opposto; essi sono *eb* (perchè nella prima disposizione la *e* segue la *b* anzichè precederla) *ea*, *ec*, *ed*, *ig*, *ib*, *ia*, *if*, *ih*, *ic*, *id*, *gb*, *ga*, *gf*, *gc*, *gd*, *ba*, *fc*, *fd*, *hc*, *hd* cioè in numero di **21**. Se nella seconda disposizione noi eseguiamo una alterazione noi veniamo o ad aggiungere un altro di questi rovesciamenti d'ordine (come se per esempio eseguiamo la alternazione ((*bd*)) sicchè le lettere *b d* vengono a succedersi con ordine opposto a quello che hanno nella disposizione primitiva) o a togliere uno di questi rovesciamenti di ordine (come se eseguiamo l' alternazione ((*gc*)), per cui le lettere *g c* vengono a succedersi nello stesso ordine, che avevano nella disposizione primitiva); inoltre rispetto a ciascheduna lettera, che nella seconda disposizione è compresa tra quelle due lettere che si alternano, verremo o ad aggiungere due rovesciamenti, o a toglierne due, o a sostituirne uno ad un altro; infatti colla alternazione ((*bd*)) veniamo ad aggiungere (rispetto alla lettera *c*) i due rovesciamenti *dc cb*; — sostituiamo il rovesciamento *da* al *ba*, — sostituiamo il *fb* al *fd*, — ecc.; — colla alternazione ((*gc*)) togliamo i due rovesciamenti *gf fc*, — ecc. Perciò partendo dalla disposizione primitiva la prima alternazione produrrà un numero dispari di rovesciamenti, la seconda alternazione renderà tal numero pari, ecc., sicchè si ha il Teorema: *Il numero delle alternazioni con cui una disposizione può mutarsi in un' altra è pari o dispari insieme col numero di rovesciamenti nell' ordine di due lettere, che hanno luogo da una disposizione all'altra.* Ne viene che quantunque una sostituzione possa eseguirsi con differenti maniere di alternazioni, pure il numero delle alternazioni non potrà differire da una maniera all' altra se non che di un numero pari. Così dalla disposizione *abcde*

si può passare alla *e d a b c* o colle tre alternazioni ((*ae*)) ((*ac*)) ((*bd*)) o colle cinque

((*ab*)) ((*ac*)) ((*be*)) ((*bc*)) ((*bd*)) , ecc.

v. Risulta da quanto precedentemente si disse anche l' altro Teorema: *Il numero delle alternazioni, con cui una disposizione può mutarsi in un'altra è pari o dispari insieme col numero di tutte le sostituzioni binomie, quadrinomie, sestinomie, ecc. che occorrono per passare da una disposizione all'altra.* Così per decidere se dalla disposizione *a b c d e f g h i* si pervenga alla *e i g b a f h c d* con un numero pari o dispari di alternazioni, invece di numerare (§ *iv*) i 21 rovesciamenti d'ordine, si potrà osservare che la sostituzione è composta di tre semplici ((*ae*) (*bid*) (*cgh*)), delle quali *una* sola (la binomia) contiene un numero pari di termini; dunque anche il numero di alternazioni è *dispari*.

vj. Quanto abbiamo dimostrato giustifica pienamente la definizione, che abbiamo data del determinante, poichè il segno da attribuirsi ad un qualunque suo termine $c_1 d_2 a_3 e_4 b_5$ è determinato quando si dice che esso sarà + o — secondo che sarà pari o dispari il numero delle alternazioni, che deggiono esigersi sulle lettere del termine *diagonale* $a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$, acciocchè prendano rispetto agli indici la disposizione $c_1 d_2 a_3 e_4 b_5$. (La cosa non cangia menomamente se si tengano ferme le lettere e si mutino gli indici.) Per determinare il segno di un termine, se gli elementi sieno espressi nel modo generale, la maniera più spedita sarà quella che risulta dal teorema del § *v*, e notando che da

$$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 \text{ ad } a_3 b_5 c_1 d_2 e_4$$

ha luogo negli indici la sostituzione

((13) (254))

vediamo subito che il segno del secondo termine dev' essere — a motivo dell' unica sostituzione binomia ((13)). Ma se gli elementi sieno dati in altro modo credo che la maniera meno imbarazzante sia quella del Cramer che ho data al § 4. e che si appoggia al teorema del § *iv*; cioè osservare che l' elemento c_1 è superiore in riga ai *due* che lo precedono, d_2 è pur esso superiore a *due*, ed e_4 è superiore ad *uno*, sicchè in tutti sono *cinque* rovesciamenti d'ordine, e perciò il segno sarà — .

vij. Se sopra una disposizione $abcd$ si eseguisce ripetutamente una medesima sostituzione si ricadrà o presto o tardi sulla disposizione primitiva; il minimo numero delle ripetizioni a ciò necessarie, ossia il numero delle disposizioni differenti che possono ottenersi mediante quella sostituzione, dicesi il *grado* della sostituzione. È facile persuadersi che: ***Il grado di una sostituzione semplice è uguale al numero dei termini che essa contiene; ed il grado di una sostituzione composta è il minimo multiplo dei gradi di tutte le sostituzioni semplici in essa contenute.***

viij. Diremo poi grado di un *complesso* di sostituzioni il numero delle disposizioni differenti, che possono ottenersi mediante quelle sostituzioni in qualsivoglia modo tra loro combinate o ripetute. Così per esempio il complesso delle sostituzioni

$$((ab)) \ , \ ((ac)(bd))$$

(costituito da una sostituzione binomia, e da una sostituzione composta di due binomie) è del grado 8.° perchè mediante quelle due sostituzioni si ottengono (adoperandole alternativamente) soltanto le 8 disposizioni differenti

$$abcd \, , \, bacd \, , \, dcab \, , \, dcba \, , \, badc \, , \, abdc \, , \, cdba \, , \, cdab \, .$$

Un *complesso* di sostituzioni differisce da una sostituzione composta, in quanto che le parti di questa deggiono tutte eseguirsi insieme, ed invece le sostituzioni del complesso deggiono separatamente ripetersi tante volte quante occorre per trovare tutte le possibili disposizioni differenti. Così unendo insieme le due sostituzioni del precedente complesso, sia in un ordine che nell' altro,

$$((ab)) + ((ac)(bd)) = ((adbc))$$
$$((ac)(bd)) + ((ab)) = ((acbd))$$

si ottiene una sostituzione del solo 4.° grado.

ix. Il precedente complesso di sostituzioni (una semplice ed una composta) è identico col complesso di sostituzioni semplici

$$((ab)) \ , \ ((acbd))$$

perchè $((acbd))+((ab))=((ac)(bd))$. — Unendo al precedente complesso di 8.° grado la sostituzione $((abc))$ si ottiene il complesso

$$((ab))\ ,\ ((abc))\ ,\ ((acbd))$$

che è del grado 24.°, cioè che serve a formare tutte le 1. 2. 3. 4. disposizioni possibili. Questo complesso può decomporsi nel complesso del 4.° grado

$$((a\,b\,c\,d))$$

e nel complesso del 6.° grado

$$((ab))\ ,\ ((abc))\,.$$

x. La funzione $ab+cd$ che non cangia di valore per nessuna delle sostituzioni, che nascono dal precedente complesso $((ab))$, $(ac)(bd))$ dell' 8.° grado non può ricevere che $\frac{1.\,2.\,3.\,4}{8}=3$ valori differenti, quali risultano dalla sostituzione $((abc))$ e sono

$$ab+cd\ ,\ bc+ad\ ,\ ca+bd\,.$$

Invece la $ac-bd$, che non cangia colla sostituzione $((ac)(bd))$ sarà suscettibile di 6 valori quali risultano dal complesso $((ab))$, $((abc))$.

xj. La separazione di tutte le possibili disposizioni in due *gruppi* distinti da questo carattere, che un numero dispari di alternazioni fa passare da un gruppo all' altro, è necessaria anche per distinguere il segno dell' area d' un triangolo o del volume d' un tetraedro. Se è positivo il triangolo ABC lo sono anche BCA , CAB ed invece dee considerarsi come negativo il triangolo stesso indicato in uno dei tre modi ACB , CBA , BAC che differiscono dai precedenti per una sola alternazione. Similmente le 24 disposizioni delle lettere apposte ai vertici di un tetraedro si separano in due gruppi, le une indicando il volume positivo, e le altre il negativo; ed infatti se consideriamo per esempio le disposizioni $ABCD$, $CABD$, che appartengono allo stesso gruppo (perchè la seconda nasce dalla prima mediante la sostituzione trinomia $((ACB))$, cioè mediante le due alternazioni $((AC)+(AB))$), riconosceremo che un osservatore posto nel vertice A vede girare le lettere BCD intorno alla faccia opposta del tetraedro per lo stesso verso con cui un osservatore posto in C vede il giro ABD sulla faccia opposta. Sia E un punto posto dentro del te-

traedro, i quattro tetraedri avranno lo stesso segno di $ABCD$, quando si sostituisca la lettera E a ciascuna di queste, quindi sarà

$$ABCD = EBCD + AECD + ABED + ABCE\,;$$

e questa equazione valerà qualunque sia la disposizione dei punti nello spazio, purchè si tenga conto dei segni. Il tetraedro $AECD$ può indicarsi anche con $EADC$, perchè fra queste due disposizioni hanno luogo due alternazioni, ec. sicchè è anche

$$ABCD = EBCD + EADC + EABD + EACB.$$

INDICE

(*Letta il 22 giugno* 1857.)